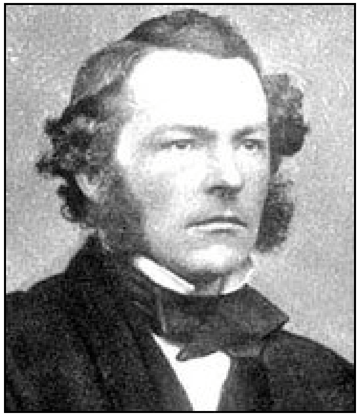
UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

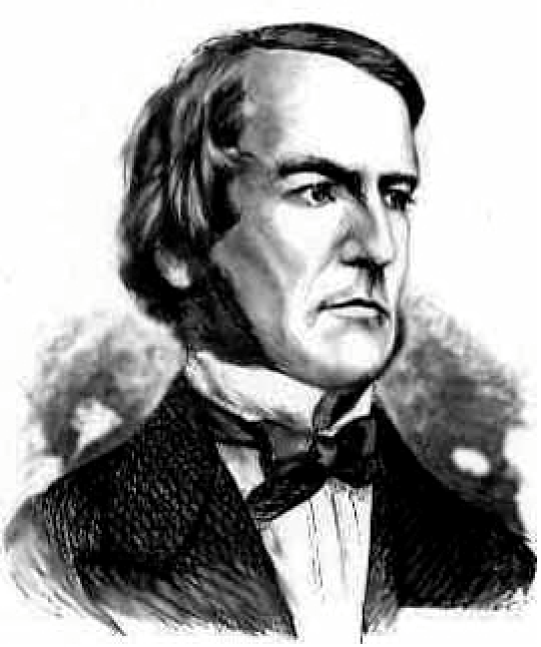
GEORGE BOOLE
(1815-1864)

Rafael del Vado Vírseda
Departamento de Sistemas Informáticos y Programación
Universidad Complutense de Madrid, Spain
rdelvado@sip.ucm.es

Curso académico 2005-2006

George Boole (1815-1864)





George Boole (1815-1864)

- El matemático inglés *George Boole (1815-1864)* dio forma dos siglos más tarde a los axiomas de Leibniz y creo los *fundamentos de la lógica matemática mediante el álgebra* que lleva su nombre.

- Su lógica la conocemos hoy como *lógica de proposiciones* y permite expresar y demostrar *silogismos* de la forma:

Todos los mamíferos respiran mediante pulmones
Los perros son mamíferos

Los perros respiran mediante pulmones

- *Boole realizó parcialmente los sueños de Leibniz*, aun sin conocer los escritos de éste. Su principal contribución fue incorporar la lógica -que siempre había formado parte de la filosofía- al ámbito de las matemáticas y establecer sus axiomas y reglas fundamentales.

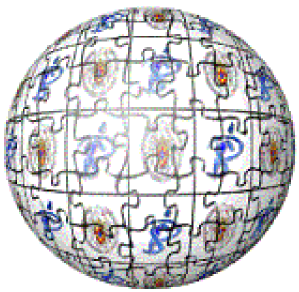
- El sistema de Boole es sin embargo muy limitado. Por ejemplo, no permite formalizar afirmaciones tales como:

"Todo mamífero, o bien tiene patas, o bien tiene aletas"

George Boole (1815-1864)

- El trabajo de Boole llegó a ser un paso fundamental en la revolución de los computadores cuando *Claude Shannon* en 1938, demostró como las operaciones booleanas elementales, se podrían representar mediante circuitos conmutadores eléctricos, y como la combinación de estos podía representar operaciones aritméticas y lógicas complejas. Shannon demostró asimismo que el álgebra de Boole se podía utilizar para simplicar circuitos conmutadores.

UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID



La dura vida de George Boole

Rafael del Vado Vírseda
Departamento de Sistemas Informáticos y Programación
Universidad Complutense de Madrid, Spain
rdelvado@sip.ucm.es

Curso académico 2005-2006

De Leibniz a George Boole

- La inteligente y hermosa princesa Carolina von Ansbasch, que tenía dieciocho años y un día habría de ser reina de Inglaterra como esposa de Jorge II, conoció a Leibniz en Berlín en 1704.
- Después de que ella hubiera partido a Inglaterra con la corte siguió manteniendo su amistad con Leibniz por correspondencia. Ella trató de persuadir a su suegro, el rey Jorge I de Inglaterra, de que trajera a aquel a Inglaterra. Sin embargo, el rey insistía en que Leibniz permaneciera en Alemania para terminar la historia familiar hannoveriana.
- Carolina se vio envuelta en la absurda disputa sostenida entre, por un lado, Leibniz y, por otro, Newton y sus seguidores, en la que cada parte acusaba a la otra de haber plagiado la invención del cálculo.
- Carolina, por su parte, trató de hacer que se tradujeran al inglés algunos escritos de Leibniz. Este objetivo le puso en contacto con Samuel Clarke, a quien le habían recomendado como traductor. Clarke era filósofo, teólogo y también ferviente discípulo de Newton. En su obra *Being and Attributes of God* (1704), Clarke había expuesto una *demostración de la existencia de Dios*.
- El hecho más importante respecto a Samuel Clarke es que casi un siglo y medio después de la muerte de Leibniz, *George Boole mostraría la eficacia de sus métodos utilizando como ejemplo el argumento a favor de la existencia de Dios de Clarke*.
- *Con dichos métodos, Boole había conseguido que el sueño de Leibniz cobrara vida hasta el punto de poder reducir la complicada deducción de Clarke a un simple conjunto de ecuaciones*.

La dura vida de George Boole (I)

- George Boole, el primero de cuatro hermanos, nació el 2 de noviembre de 1815 en la ciudad de Lincoln, al este de Inglaterra.
- Su padre, John Boole, era un zapatero que a duras penas se ganaba la vida con su negocio, pero sin embargo, tenía una gran pasión por aprender y particularmente por los instrumentos científicos. En el escaparato de su tienda exhibía con orgullo un telescopio que él mismo había hecho a mano.
- Desgraciadamente, no fue un hombre de negocios tan efectivo, y enseguida su inteligente y concienzudo hijo se encontró cargando con la responsabilidad de mantener a toda la familia.
- Los padres de George Boole, que reconocieron enseguida el talento de su hijo, eran demasiado pobres como para proporcionarle la educación formal adecuada, de modo que con la inestimable ayuda de su padre, George fue sobre un autodidacta.
- Boole no sólo estudió latín y griego, sino también francés y alemán, y fue capaz de escribir artículos de investigación matemática en todas esas lenguas (por supuesto, mucho después).
- Nunca perteneció a ninguna confesión religiosa determinada y le resultaba imposible creer en la divinidad de Cristo, pero mantuvo firmes convicciones religiosas a lo largo de toda su vida.

La dura vida de George Boole (II)

- Pronto abandonó su meta inicial de unirse al clero de la iglesia de Inglaterra, en parte a causa de sus creencias, pero también de manera determinante a causa de la necesidad de su familia de recibir ayuda económica de inmediato cuando quebró el negocio de su padre.

- George no tenía todavía dieciséis años cuando comenzó su carrera como profesor en una pequeña escuela metodista a unos sesenta y cinco kilómetros de su casa.

- Al cabo de dos años fue despedido, aparentemente debido a las quejas acerca de su conducta religiosa: trabajaba en cuestiones matemáticas los domingos … ¡e incluso en la iglesia! En realidad, esta fue la época en la que los empeños de Boole se orientaron cada vez más hacia la matemática.

- En años posteriores, cuando recordaba este período de su vida, explicaba que teniendo un presupuesto verdaderamente limitado para comprar libros descubrió que los de matemáticas eran los más rentables porque se tardaba mucho más en leerlos bien que los libros sobre otras materias.

- También le gustaba hablar de la inspiración que repentinamente se le presentó durante su estancia en la escuela metodista: Mientras caminaba por un prado, la idea de que se podrían expresar las relaciones lógicas en forma algebraica iluminó su mente. Esta experiencia, la cual compara un biógrafo con la de San Pablo en el camino a Damasco, sólo daría frutos muchos años más tarde.

La dura vida de George Boole (III)

- Tras la escuela metodista, Boole obtuvo un empleo en Liverpool. Pero después de seis meses de vivir e impartir clases allí se sintió obligado a abandonarlo a causa de (en palabras de su hermana) “el espectáculo de apetitos y pasiones vulgares satisfechas con desmesura”, presumiblemente por parte del director del colegio.

- Su siguiente empleo también duró poco. Entonces, cuando tenía diecinueve años, George Boole decidió abrir su propia escuela en su ciudad natal de Lincoln para asentar las finanzas de su familia sobre una base sólida.

- Durante quince años, hasta que aceptó una plaza de profesor en la recién fundada Universidad de Cork (Irlanda), Boole desarrolló una fructífera carrera como maestro de escuela. Sus escuelas (hubo tres diferentes y sucesivas) fueron la única fuente de subsistencia para sus padres y hermanos, aunque finalmente su hermana Mary Ann y su hermano William lo ayudaron en su labor.

- Aunque puede considerarse que regentar una escuela en régimen abierto y de internado y, al mismo tiempo, impartir muchas clases podría ser un empleo muy absorbente, durante este período Boole consiguió recorrer el camino que va de ser un estudiante de matemáticas a convertirse en un matemático creativo. Además, de algún modo encontró tiempo para desarrollar actividades de interés social.

La dura vida de George Boole (IV)

- Fue fundador y miembro del consejo de administración de un hogar de acogida femenino en Lincoln cuyo objetivo era "*proporcionar un hogar provisional en el que, mediante la instrucción moral y religiosa y la adquisición de hábitos industriosos, aquellas mujeres que se habían apartado de los senderos de la virtud pudieran reintegrarse a un lugar digno en la sociedad*".

- El biógrafo de Boole se refiere a las penitentes que tenían que recibir ayuda de esta institución diciendo que eran prostitutas (y sin duda en aquella Lincoln victoriana estas eran numerosas). Seguramente, la clientela típica de este centro era una mujer joven de clase baja que se había descubierto embarazada y había sido abandonada por un amante de su misma clase social después de que este le hubiera prometido matrimonio.

- Quizá podamos hacernos una idea de la actitud personal de Boole hacia las cuestiones sexuales a partir de lo que dijo en dos conferencias sobre asuntos no relacionados con la matemática. En una de ellas, una conferencia sobre educación, advertía:

> *Una gran proporción de la literatura griega y romana existente [...] está profundamente manchada de alusiones, y con demasiada frecuencia más que alusiones, a los vicios del paganismo [...]. Pero no creo que la inocencia de la juventud pueda exponerse a la contaminación del mal sin riesgos.*

La dura vida de George Boole (IV)

- Y una conferencia sobre el adecuado uso del tiempo libre (ofrecida tras una fructífera campaña realizada por la *Lincoln Early Closing Association* para conseguir la jornada laborar de diez horas) incluía las siguientes y severas palabras:

  > *Uno no tiene ninguna excusa para buscar satisfacción en aquellas metas que se apartan de la virtud.*

- Siguiendo los pasos de su padre, Boole también estuvo muy ligado al *Instituto de Mecánica de Lincoln*. Este tipo de institutos había florecido por toda la Gran Bretaña victoriana y estaban dedicados principalmente a la educación nocturna de artesanos y demás trabajadores.

- Boole fue miembro de una comisión en el de Lincoln, hizo recomendaciones para ampliar los fondos de la biblioteca, ofreció conferencias e impartió clases sin remuneración sobre gran variedad de temas.

- Entre todo esto, encontraba tiempo de algún modo para estudiar algunos de los tratados de matemáticas más importantes, tanto ingleses como del resto de Europa, y para empezar a hacer sus propias aportaciones.

La dura vida de George Boole (V)

- *Gran parte de las primeras obras de Boole ofrecen testimonio a favor de la creencia de Leibniz en el poder del simbolismo matemático adecuado* y en el modo mágico y casi sin esfuerzo en el que los símbolos parecen ofrecer respuestas correctas a los problemas. Leibniz había mostrado el ejemplo del álgebra.

- *Cuando Boole empezó su obra, en Inglaterra estaba empezando a descubrirse que el poder del álgebra procedía del hecho de que los símbolos que representan cantidades y operaciones obedecían a un reducido número de reglas y leyes básicas*. Esto suponía que ese mismo poder podía aplicarse a los objetos y operaciones del mas variado tipo, siempre que de algún modo obedecieran a algunas de esas mismas leyes.

- *En sus primeras obras, Boole aplicó métodos algebraicos a los objetos que los matemáticos llaman operadores*. Estos "operan" sobre las expresiones del álgebra ordinaria para dar lugar a nuevas expresiones. Boole estaba particularmente interesado en los *operadores diferenciales*, así llamados porque intervenían en la operación del cálculo llamada *derivación*.

- *Boole mostró cómo se podían resolver ciertas ecuaciones diferenciales aplicando métodos algebraicos ordinarios a dichos operadores diferenciales*, de especial importancia porque muchas de las leyes fundamentales del universo físico adoptan la forma de ecuaciones diferenciales (es decir, de ecuaciones en las que intervienen operadores diferenciales).

La dura vida de George Boole (VI)

- Durante los años que ejerció como maestro, Boole publicó una docena de artículos de investigación en el *Cambridge Mathematical Journal*. Además, remitió un artículo muy extenso a la revista *Philosophical Transactions of the Royal Society*.
- En primera instancia la *Royal Society* era reacia a admitir que un no miembro enviara una propuesta de esta naturaleza, pero finalmente decidieron aceptarla y posteriormente la *premiaron con una medalla de oro*.
- *El método de Boole consistía en introducir un procedimiento y luego aplicarlo a una serie de ejemplos*. Generalmente, para *demostrar* que sus métodos eran correctos no se exigía a sí mismo más que el hecho de que sus ejemplos funcionaran.
- *En aquella época, Boole estableció amistad y mantuvo correspondencia con una serie de jóvenes matemáticos ingleses destacados*.
- Fue una discrepancia entre el filósofo sir *William Hamilton* y el amigo de Boole, *Augustus de Morgan*, lo que devolvió el pensamiento de Boole hacia aquel destello de intuición que tuviera hacía tanto tiempo de que quizá *las relaciones lógicas podrían expresarse como una especie de álgebra*.

La dura vida de George Boole (VII)

- George Boole tenía treinta y dos años cuando se publicó su *primera monografía revolucionaria sobre la lógica como una forma de la matemática*. Su exposición más lograda, *An Investigation of the Laws of Thought* (*Una Investigación sobre las Leyes del Pensamiento*), apareción siete años más tarde.
- En ese libro, *Boole mostró como aplicar el álgebra ordinaria a los procesos del pensamiento humano, escribiendo las ecuaciones algebraicas en las que las incógnitas no denotan números sino pensamientos humanos*.
- *Estos fueron años llenos de incidentes en la vida de Boole*. La clase social a la que pertenecía y la poco convencional educación que había recibido eliminaba aparentemente toda posibilidad de que accediera a un puesto en una univerdad inglesa.
- Curiosamente, *fue el "problema" irlandés lo que abrió una brecha para Boole*. Entre las muchas y airadas quejas que había en Irlanda en relación con el gobierno inglés, una de ellas era el carácter protestante de su única universidad, el *Trinity College de Dublín*.
- En respuesta a ellas, el gobierno británico propuso fundar tres nuevas universidades, que se llamarían los *Queen's Colleges*, en Cork, Belfast y Galway. Adelantándose mucho a su época, estas universidades serían no confesionales. Boole decidió solicitar un puesto en una de estas universidades y finalmente, tres años después, *en 1849, fue nombrado profesor de matemáticas en el Queen's College de Cork*.

La Universidad de Cork en Irlanda (I)

- En 1849 Irlanda había atravesado la peor época de hambrunas y epidemias producidas por la peste de la patata, un hongo devastador que destruyó la mayor parte de la cosecha de patatas de la que dependían las clases bajas irlandesas. Muchos de aquellos que no murieron de hambre, lo hicieron de tipus, disentería, cólera y fiebres.

- Aunque sin duda Cork no era ningún centro cultural ni intelectual importante, *el cargo ofreció a Boole la posibilidad de llevar una vida bastante más adecuada a su envergadura como uno de los grandes matemáticos del siglo*.

- Su padre había muerto hacía poco y, después de proveer adecuadamente a su madre, quedó finalmente liberado de la carga de ser el sostenedor de la familia y pudo pensar en tener una vida propia.

- *Las matemáticas que se enseñaban en Cork eran de un nivel bastante bajo para una universidad.* El plan de estudios empezaba con "*Aritmética decimal y fraccionaria*" y continuaba con cuestiones que hoy día se enseñan en la educación secundaria.

- El salario anual de Boole era de 250 libras, además de la matrícula de los alumnos a razón de unas dos libras por trimestre. Como no tenía ningún ayudante, él mismo calificaba los deberes semanales de sus alumnos.

La Universidad de Cork en Irlanda (II)

- Aunque el rector era el distinguido científico católico sir Robert Kane, la jerarquía de la Iglesia católica había llegado tan lejos como para prohibir realmente a los miembros del clero que participaran en la labor de las universidades.
- Aquel rector tampoco se granjeó el cariño de su plantilla: su esposa no tenía ninguna gana de vivir en Cork, de manera que el rector trató de dirigir la universidad desde Dublín. Esto, unido a su arbitrario y belicoso carácter, desembocaba en un conflicto tras otro entre el rector y la plantilla; estériles batallas en la que normalmente Boole se veía involucrado.
- Mary Everest, la futura esposa de Boole, refería posteriormente algunas de sus primeras impresiones acerca de las actitudes de algunos internos de Cork hacia el hombre con quien se casaría. La respuesta de una mujer a la pregunta *"¿Cómo es el profesor de matemáticas?"* era *"¡Oh! Es ... el tipo de hombre al que uno le puede confiar a su hija"*. Otra mujer explicaba la ausencia de sus hijos pequeños diciéndole a la señorita Everest que George Boole se los había llevado a pasear y que siempre le parecía bien que estuvieran con él. A la réplica de que Boole parecía ser el favorito de todos, la mujer objetaba:

> *No está entre mis favoritos, […] al menos, yo no disfruto con su compañía. No me importa estar con gente tan buena. […] Nunca manifiesta que te considera perverso, pero cuando estás junto a alguien tan santo y puro no puedes evitar percibir lo extraño que debes de parecerle. Me hace sentir mala, pero siempre estoy tranquila cuando los chicos están con él. Se que están recibiendo algo bueno.*

Mary Everest

- *Mary Everest* era hija de un clérigo excéntrico y sobrina del teniente coronel sir George Everest, de quien recibió el nombre la montaña más alta del mundo. También era sobrina de un amigo de Boole y colega de John Ryall, vicepresidente y profesor de griego en la Universidad de Cork, que fue quien presentó a George y Mary.
- De niña, Mary había mostrado aptitudes para la matemática y después de que George empezara a darle clases particulares se hicieron buenos amigos y se carteaban con frecuencia.
- Parece que Boole creía que una diferencia de edad de diecisiete años impedía cualquier cosa, pero cinco años después de su primer encuentro las cosas alcanzaron un punto crítico con la muerte del padre de Mary.
- Como aparentemente esta quedaba economicamente desvalida, George le propuso matrimonio de repente; y antes de que terminara el año, ya estaban casados.
- Su matrimonio no duró más que nueve años, ya que Boole murió a la edad de sólo cuarenta y nueve años tras haber andado ocho kilómetros para ir a clase bajo una fría tormenta de octubre. La consiguiente bronquitis se convirtió enseguida en neumonía, y dos semanas más tarde murió.
- Su muerte, trágicamente, pudo haberse visto acelerada por las extrañas ideas médicas de su esposa, que parece ser que trató su neumonía colocándolo entre sábanas empapadas y frías.

Ethel Lilian Voynich Boole

- El matrimonio había sido feliz. Mary Boole rememoraba que era "como el recuerdo de un sueño soleado". La viuda de Boole vivió hasta bien entrado el siglo XX y murió a la edad de ochenta y cuatro años mientras la Primera Guerra Mundial rugía al otro lado del canal de la Mancha.

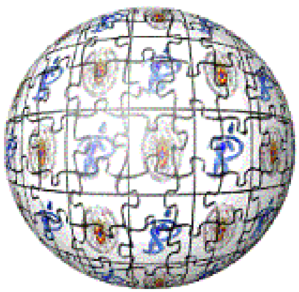
- Se adscribió a diferentes sistemas de creencias místicas y escribió un montón de tonterías. Sus cinco hijas, todas chicas, tuvieron vidas muy interesantes.

- Alicia, la tercera de ellas, poseía unas dotes para la geometría muy llamativas: era capaz de visualizar objetos en cuatro dimensiones con claridad. Esto le permitió hacer una serie de importantes descubrimientos matemáticos.

- El caso de *Ethel Lilian*, la más joven, fue el más asombroso. Cuando murió su padre tenía sólo seis meses, y recordaba su infancia sumida en una terrible pobreza.

- *Lily*, que era como la llamaban, se hizo famosa como autora de *The Gadfly* (*El tábano*) una novela inspirada en su breve pero apasionada aventura amorosa con el hombre que sería conocido como *Sidney Riley* y cuya increíble vida constituyó la base para una serie de televisión llamada *Riley: Ace of Spies*. El libro se convirtió en un bestseller mundial, especialmente en la Rusia post-revolucionaria (antes de su muerte se habían vendido en aquel país más de 2.500.000 de ejemplares).

UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID



El álgebra lógica de George Boole

Rafael del Vado Vírseda
Departamento de Sistemas Informáticos y Programación
Universidad Complutense de Madrid, Spain
rdelvado@sip.ucm.es

Curso académico 2005-2006

Algebra de Clases (I)

- La *lógica clásica de Aristóteles* que tanto había fascinado al joven Leibniz contenía sentencias de este tipo:

  - *Todas las plantas son seres vivos.*
  - *Ningún hipopótamo es inteligente.*
  - *Algunas personas hablan inglés.*

- Boole se dio cuenta de que lo importante en el razonamiento lógico acerca de palabras tales como "*seres vivos*", "*hipopótamo*" o "*personas*" es la *clase* o *grupo* de todos los individuos descritos por la palabra en cuestión:

  - La *clase* seres vivos.
  - La *clase* hipopótamos.
  - La *clase* personas.

  Es más, descubrió cómo se podía expresar este tipo de razonamiento en términos de un *álgebra de clases*.

- Boole utilizó *letras para representar clases*, del mismo modo que antes se habían utilizado las letras para representar números u operadores: Si las letras x e y representan dos clases concretas, entonces Boole escribía xy para referirse a la clase de cosas que pertenecen a un tiempo a x y a y.

Algebra de Clases (II)

- Como escribió el propio Boole:

  […] Si un adjetivo como "bueno" se emplea como término de una descripción, representamos con una letra, como por ejemplo y, a todas aquellas cosas a las que se aplica el calificativo "bueno", es decir, a "todas las cosas buenas" o a la clase "cosas buenas". Admitimos después que mediante la combinación de letras xy representaremos la clase de objetos a la que se puede aplicar simultáneamente el nombre o la descripción que representa x y la que representa y. Así, si x en solitario representa "cosas blancas" e y representa "ovejas", xy representará "ovejas blancas"; y si, de manera similar, z representa "cosas con cuernos" […] zxy representará "ovejas blancas con cuernos".

- Boole pensaba que esta operación aplicada a las clases era de alguna forma parecido a la operación de la multiplicación aplicada a los números. Sin embargo, se dio cuenta de que había una diferencia fundamental.

- Si y es la clase de ovejas, ¿qué es yy? Debería ser la clase de cosas que son ovejas y además … ovejas. Pero esto es exactamente lo mismo que la clase de ovejas; de modo que $yy = y$.

- La expresión de Boole $xx = x$, donde x representa una clase, puede compararse con la de Leibniz $A \oplus A = A$. En ambos casos, cuando una operación que pretende aplicarse a pares de términos se aplica a un término y a sí mismo el resultado es el propio término.

Algebra de Boole aplicada a la Lógica

- Si x e y representan dos clases, entonces Boole representa mediante xy a la clase de aquellas cosas que pertenecen tanto a x como a y. *Pretendía que este notación sugiriera su analogía con la multiplicación en el álgebra ordinaria*. En terminología contemporánea, xy representa la *intersección* de x e y.
- La ecuación $xx = x$ es siempre verdadera cuando x representa una clase. Boole se planteó la siguiente pregunta: *En el álgebra ordinaria, donde x representa un número, ¿cuándo es verdadera la ecuación xx = x?*
- La respuesta es sencilla: *la ecuación es verdadera cuando x es igual a 0 o a 1, y para ningún otro número*. Esto le condujo al principio de que *el álgebra de la lógica era aquello en lo que se convertiría justamente el álgebra ordinaria si estuviera restringida a los valores 0 y 1*.
- Para que esto tuviera sentido, era necesario *reinterpretar los símbolos 0 y 1 como clases*. Para ello, analizamos cómo se comportan el 0 y el 1 respectivamente en la multiplicación ordinaria:
  - *0 veces cualquier número es 0*. En símbolos: 0x = 0. Para las clases, 0x será idéntico a 0 para cualquier x, sólo si *entendemos que 0 es una clase a la que no pertenece nada*; en la terminología moderna, 0 es el *conjunto vacío*.
  - *1 vez cualquier número es ese mismo número*. En símbolos: 1x = x. Para las clases, 1x será idéntico a x para todo x, siempre que *1 contenga cualquier objeto que consideremos* o, como podríamos decir, siempre que 1 sea el *universo de discurso*.

El Algebra de Boole (I)

- El álgebra ordinaria se ocupa de la suma, la resta y la multiplicación. Si Boole quería *representar el álgebra de la lógica exactamente como el álgebra ordinaria* pero con la regla especial $\boldsymbol{xx = x}$ tenía que ofrecer una *interpretación para* **+** *y* **-**.

- Si x e y representan dos clases distintas, Boole hizo que $\boldsymbol{x + y}$ representara a la *clase de todas las cosas que contenían x e y*, a lo cual llamamos hoy día *unión* de x e y.

- Por ejemplo, si x es la *clase de hombres* e y es la *clase de mujeres*, entonces $\boldsymbol{x + y}$ es la *clase compuesta de todos los hombres y mujeres*.

- Boole también escribió $\boldsymbol{x - y}$ para referirse a la *clase de cosas que pertenecen a x y que no están en y*.

- Por ejemplo, si x representa la *clase de todas las personas* e y representa la *clase de todos los niños*, entonces $\boldsymbol{x - y}$ representaría la *clase de los adultos*.

- Concretamente, $\mathbf{1} - \boldsymbol{x}$ sería la *clase de cosas que no pertenecen a x*, de modo que $\boldsymbol{x} + (\mathbf{1} - \boldsymbol{x}) = \mathbf{1}$.

El Algebra de Boole (II)

- *Veamos cómo funciona el álgebra de Boole*. Sirviéndonos de la *notación algebraica*, escribamos x^2 en lugar de xx. De este modo, podemos escribir la *regla básica de boole* como $\mathbf{x^2 = x}$ o $\mathbf{x - x^2 = 0}$.

- Si sacamos factor común de esta ecuación mediante las reglas ordinarias del álgebra, queda:

$$\boxed{\mathbf{x\,(1 - x) = 0}}$$

Dicho con palabras: *Nada puede pertenecer y no pertenecer al mismo tiempo a una clase x determinada*.

- Para Boole, *este era un resultado emocionante que le animaba a pensar que estaba en el buen camino*. Porque como él decía, citando la *Metafísica de Aristóteles*, esta ecuación expresaba con precisión

> *[...] ese "principio de no contradicción" que Aristóteles había descrito como el axioma fundamental de toda la filosofía. "Es imposible que una misma cualidad pueda pertenecer y no pertenecer a una misma cosa [...] Este es el más cierto de todos los principios [...] aquel al que remiten como razón última todos los que demuestran algo. Porque por naturaleza este es el origen de todos los demás axiomas".*

Los Silogismos de Aristóteles (I)

- La parte de la lógica que *Aristóteles* estudió se ocupa de las inferencias de un determinado tipo muy restringido, llamadas *silogismos*.
- Los *silogismos* son inferencias formadas por un par de proposiciones llamadas *premisas* que conducen a otra proposición llamada *conclusión*. Las premisas y las conclusiones se deben representar mediante sentencias de uno de los cuatro tipos siguientes:

Tipo de sentencia	**Ejemplo**
Todos los X son Y	*Todos los caballos son animales*
Ningún X es Y	*Ningún árbol es un animal*
Algunos X son Y	*Algunos caballos son purasangre*
Algunos X no son Y	*Algunos caballos no son purasangre*

- El siguiente es un ejemplo de un *silogismo válido*

$$\frac{\begin{array}{c}\textit{Todos los X son Y}\\ \textit{Todos los Y son Z}\end{array}}{\textit{Todos los X son Z}}$$

El hecho de que este silogismo sea *válido* quiere decir que *cualesquiera que sean las propiedades con las que sustituyamos X, Y y Z, siempre que las dos premisas dadas sean verdaderas, la conclusión también lo será*.

Los Silogismos de Aristóteles (II)

- Dos ejemplos de este silogismo:

Todos los caballos son mamíferos	*Todos los buléfagos son carabones*
Todos los mamíferos son vertebrados	*Todos los carabones son morados*
Todos los caballos son vertebrados	*Todos los buléfagos son morados*

- *Se pueden utilizar fácilmente los métodos algebraicos de Boole para demostrar que este silogismo es válido*:

1) Decir que todo lo que pertenece a X pertenece también a Y es lo mismo que decir que no hay nada que pertenezca a X y no pertenezca a Y, es decir, que $\boldsymbol{X(1 - Y) = 0}$, o de un modo equivalente que $X = XY$.

2) Igualmente, podemos escribir la segunda premisa como $Y = YZ$. Utilizando estas ecuaciones obtenemos:

$$X = XY = X\,(YZ) = (XY)\,Z = XZ$$

que es la conclusión que buscábamos.

Los Silogismos de Aristóteles (III)

- Por supuesto que *no todos los silogismos que se propongan son válidos*. Podemos obtener un e-jemplo de silogismo inválido intercambiando el lugar de la segunda premisa del anterior ejemplo con su conclusión:

Todos los X son Y
Todos los X son Z

Todos los Y son Z

En esta ocasión no hay modo de utilizar las premisas $X = XY$ y $X = YZ$ para obtener la supuesta conclusión $Y = YZ$.

Razonamientos No Silogísticos (I)

- Restrospectivamente, *es difícil comprender la difusión de la creencia de que el razonamiento silogístico constituía la totalidad de la lógica*, y Boole fue bastante caústico denunciando esta idea.

- Él señalaba que la mayoría del razonamiento ordinario introduce lo que él llamaba *proposiciones secundarias*, es decir, *proposiciones que expresan relaciones entre otras proposiciones*. Este tipo de razonamiento no es silogístico.

- Para ver un ejemplo sencillo de este tipo de razonamiento "escuchemos" una conversación entre Juan y Susana. Juan no encuentra su talonario de cheques y Susana está tratando de ayudarle.

> SUSANA: ¿Te lo dejaste en el supermercado cuando fuiste a comprar?
> JUAN: No, he llamado por teléfono y no lo tienen. Si me lo hubiera dejado allí seguro que lo habrían encontrado.
> SUSANA: Espera un momento! Ayer por la noche pagaste con un cheque en el restaurante y te vi guardar el talonario en el bolsillo de la chaqueta. Si no lo hubieras utilizado desde entonces, debería estar allí.
> JUAN: Tienes razón. No lo he utilizado. Está en el bolsillo de la chaqueta.

Juan mira en el bolsillo y (si es un buen día para la lógica) el talonario desaparecido está allí.

Razonamientos No Silogísticos (II)

- *Veamos cómo podríamos utilizar el álgebra de Boole para analizar el razonamiento de Juan y Susana*. En el razonamiento de Juan y Susana intervenían las siguientes *proposiciones* (denominaremos a cada una de ellas con una letra):

  D = *Juan se dejó el talonario en el supermercado,*
  A = *El talonario de Juan apareció en el supermercado,*
  E = *Juan extendió un cheque en el restaurante ayer por la noche,*
  G = *Después de extender el cheque ayer por la noche Juan guardó el talonario en el bolsillo de la chaqueta,*
  N = *Juan no ha utilizado su talonario desde la noche anterior,*
  B = *El talonario de Juan está todavía en el bolsillo de su chaqueta.*

  Ellos utilizaron el siguiente esquema:

  PREMISAS:

  Si **D**, *entonces* **A**.
  No **A**.
  E *y* **G**.
  Si **E** *y* **G** *y* **N**, *entonces* **B**.
  N.

  CONCLUSIONES:

  No **D**.
  B.

Notación Algebráica (I)

- Al igual que los silogismos de Aristóteles, este esquema constituye una *inferencia válida*. Como sucede con cualquier inferencia válida, la verdad de las sentencias llamadas *conclusiones* se infiere de la verdad de otras sentencias, llamadas *premisas*.

- Boole se dio cuenta de que *la misma álgebra que funcionaba para las clases funcionaría también para este tipo de inferencias*.

- Utilizó una ecuación como $\boldsymbol{X = 1}$ para expresar que la proposición X es verdadera; igualmente, utilizó la ecuación $\boldsymbol{X = 0}$ para indicar que X es falsa. Así, para "No *X*" escribiría la ecuación $X = 0$.

- De manera similar, escribía la ecuación $\boldsymbol{XY = 1}$ para representar "*X e Y*". Esto funciona porque X e Y es verdadero precisamente cuando X e Y son ambas verdaderas, mientras que algebraicamente, $XY = 1$ si $X = Y = 1$, pero $XY = 0$ cuando o bien $X = 0$, o bien $Y = 0$ (o ambas cosas).

- Finalmente, la afirmación "*Si X, entonces Y*" se puede representar mediante la ecuación

$$\boldsymbol{X(1 - Y) = 0} \quad \text{(es decir, si } X = 1\text{, entonces } Y = 1\text{)}$$

Al sustituir $X = 1$ en la ecuación inicial obtenemos $1 - Y = 0$, es decir, $Y = 1$.

Notación Algebráica (II)

- Utilizando estas ideas, *podemos expresar las premisas de Juan y Susana mediante las siguientes ecuaciones*:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{D\ (1 - A) = 0,} \\ \mathbf{A = 0,} \\ \mathbf{EG = 1,} \\ \mathbf{EGN\ (1 - B) = 0,} \\ \mathbf{N = 1.} \end{array}\right.$$

  Al sustituir la segunda ecuación en la primera obtenemos **D = 0**, la primera de las conclusiones deseadas. Al sustituir la tercera y la quinta ecuaciones en la cuarta, obtenemos **1 - B = 0**, es decir, **B = 1**, la otra conclusión deseada.

- El hecho de que *el tipo de razonamiento que se produce informal e implícitamente en las interacciones humanas ordinarias pueda encerrarse en el álgebra de Boole* alimentó la esperanza de que también pudieran encerrarse en ella razonamientos más complicados.

- Podríamos considerar a los matemáticos como personas que se dedican a encapsular sistemáticamente inferencias lógicas altamente complejas, de modo que *una prueba definitiva para una teoría de la lógica que aspire a la totalidad es si abarca todos los razonamientos matemáticos*.

Ejemplo (I)

- Como ejemplo de los métodos de Boole, examinamos la *demostración de la existencia de Dios* construida por *Samuel Clarke*. Citamos un pequeño fragmento:

  Las premisas son:
  1ª Algo existe.
  2ª Si algo existe, o bien existía desde siempre, o bien ha sido creado de la nada en algún momento.
  3ª Si algo existe, o bien existe por necesidad de su propia naturaleza o bien existe por voluntad de otro ser.
  4ª Si este algo existe por necesidad de su propia naturaleza, entonces es que algo existía desde siempre.
  5ª Si esto existe por voluntad de otro ser, entonces la hipotesis de que las cosas que conocemos han sido creadas de la nada es falsa.

- Podemos expresar *simbólicamente* las anteriores proposiciones:

  x = *Algo existe,*
  y = *Algo existió siempre,*
  z = *Lo que existe ha sido creado de la nada,*
  p = *Algo existe por su propia naturaleza (es decir, el algo del que se habla más arriba),*
  q = *Algo existe por voluntad de otro ser.*

Ejemplo (II)

- Partiendo de estas premisas, Boole obtiene las siguientes *ecuaciones*:

$$\left\{\begin{array}{r} 1 - x = 0 \\ x\,\{\, yz + (1 - y)\,(1 - z)\,\} = 0 \\ x\,\{\, pq + (1 - p)\,(1 - q)\,\} = 0 \\ p\,(1 - y) = 0 \\ qz = 0 \end{array}\right.$$

- Uno se pregunta qué le habría parecido a Clarke que se redujera su intrincado razonamiento metafísico a la manipulación de simples ecuaciones. Probablemente hubiera estado encantado de ello, como discípulo de Newton que era. Por el contrario, al belicoso metafísico sir William Hamilton, que tanto odiaba las matemáticas, le habría horrorizado.

El Algebra de Boole

Un *Álgebre de Boole* es un conjunto en el que:

a) Se han definido *dos funciones binarias* que llamaremos *aditiva* (representada por x + y) y *multiplicativa* (representada por xy) y *una función monaria* representada por x'.

b) Se han definido *dos elementos*, que designamos por 0 y 1.

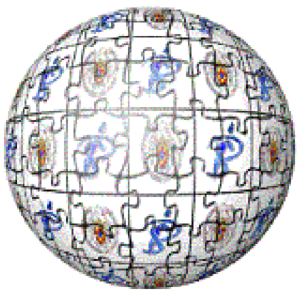
c) Se tienen las siguientes *propiedades*:

- **Conmutativa** respecto a la primera función: $x + y = y + x$
- **Conmutativa** respecto a la segunda función: $xy = yx$
- **Asociativa** respecto a la primera función: $(x + y) + z = x + (y + z)$
- **Asociativa** respecto a la segunda función: $(xy)z = x(yz)$
- **Distributiva** respecto a la primera función: $(x + y)z = xz + yz$
- **Distributiva** respecto a la segunda función: $(xy) + z = (x + z)(y + z)$
- **Identidad** respecto a la primera función: $x + 0 = x$
- **Identidad** respecto a la segunda función: $x1 = x$
- **Complemento** respecto a la primera función: $x + x' = 1$
- **Complemento** respecto a la segunda función: $xx' = 0$

Propiedades del Álgebra de Boole

- **Idempotente** respecto a la primera función: $x + x = x$
- **Idempotente** respecto a la segunda función: $xx = x$
- **Maximalidad** del 1: $x + 1 = 1$
- **Minimalidad** del 0: $x0 = 0$
- **Involución**: $x'' = x$
- **Inmersión** respecto a la primera función: $x + (xy) = x$
- **Inmersión** respecto a la segunda función: $x(x + y) = x$
- **Ley de Morgan** respecto a la primera función: $(x + y)' = x'y'$
- **Ley de Morgan** respecto a la segunda función: $(xy)' = x' + y'$

UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID



Boole y el sueño de Leibniz

Rafael del Vado Vírseda
Departamento de Sistemas Informáticos y Programación
Universidad Complutense de Madrid, Spain
rdelvado@sip.ucm.es

Curso académico 2005-2006

Leibniz Vs. Boole (I)

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

- *El sistema de la lógica de Boole contenía el de Aristóteles e iba mucho más allá de él. Pero todavía estaba muy lejos de lo necesario para hacer realidad el sueño de Leibniz*.

- Consideramos las siguientes sentencias: *Todos los estudiantes que suspenden, o bien son estúpidos o bien son perezosos*. Uno podría pensar que esta frase pertenece al tipo

  Todos los *X* son *Y*

  Sin embargo, esto exigiría que la clase de estudiantes que son estúpidos o perezosos fuera tratada como una unidad, y no nos permitiría hacer ningún razonamiento que pretendiera distinguir entre aquellos que suspenden a causa de la estupidez de aquellos otros que suspenden a causa de la pereza.

- *El sistema de la lógica de Gottlob Frege contempla razonamientos de esta naturaleza más sutil*.

- Es bastante sencillo utilizar *el álgebra de Boole como sistema de reglas para calcular*, y así diríamos que, manteniéndonos dentro de sus límites, nos proporciona el *calculus ratiocinator* que Leibniz había perseguido.

Leibniz Vs. Boole (II)

- Los escritos de Leibniz sobre esta cuestión se encontraban en sus cartas y en otros documentos i-néditos, y fue sólo a finales del siglo XIX cuando se hizo un esfuerzo importante por reunirlos y publicarlos.

- *No hay ningún modo razonable de pensar que Boole pudiera haber estado al tanto de las labores de su predecesor*.

- *Es interesante comparar el sistema completo de Boole con las tentativas fragmentarias de Leibniz*:

  1) Leibniz incluía como su *segundo axioma* $A \oplus A = A$. La operación a la que Leibniz se refirió iba a obedecer a la *regla fundamental de Boole*: $xx = x$.

  2) *Leibniz se propuso presentar su lógica como un sistema deductivo completo y detallado en el que todas las reglas se deducen de un pequeño conjunto de axiomas*. Esto está en consonancia con la práctica moderna y nos demuestra que *Leibniz, en este aspecto, se había adelantado a Boole.*

Conclusiones

- *La gran aportación de Boole fue demostrar de una vez por todas que la deducción lógica podía instituirse como una rama de la matemática*.
- Aunque había habido algunos avances después de la obra pionera de Aristóteles (fundamentalmente realizados por parte de los *estoicos* de la época helenística y por la *escolástica* europea del siglo XII), *Boole se encontró la materia básicamente tal como la había dejado Aristóteles dos milenios antes*.
- *Desde la época de Boole, la lógica matemática ha sido objeto ininterrumpidamente de nuevos avances*.
- Una organización internacional, la *Association for Symbolic Logic* (*Asociación de Lógica Simbólica*), publica dos revistas trimestrales y celebra congresos periódicos para difundir las nuevas investigaciones. Los logicos europeos también tienen sus propios congresos anuales.
- Los nuevos trabajos relativos a las relaciones entre la lógica y los ordenadores se presentan en los congresos internacionales anuales que se celebran bajo los encabezamientos de *Logic in Computer Science* y *Computer Science Logic*.
- Con algunas modificaciones menores, *el álgebra decimonónica del pensamiento de Boole se encuentra detrás de las computadoras electrónicas y es la fuerza de empuje detrás de la Inteligencia Artificial*. Sería también la *base del diseño de computadores digitales*.