No debe menospreciarse la Ciencia de los Números... no en vano en las alabanzas de Dios se dice: todo ha sido creado con medida, número y peso

San Isidoro de Sevilla (570-636

FRACTALES: MATEMÁTICAS DE BELLEZA INFINITA

Uno de los científicos actuales más importantes en el campo de la geometría fractal, el profesor *Michael F. Barnsley*, publicó en 1993 el libro *Fractals everywhere*, que se ha convertido en la referencia básica de todos aquellos que se ocupan de esta disciplina. En la primera página, dentro del capítulo de introducción, puede leerse el siguiente texto:

"La geometría Fractal cambiará a fondo su visión de las cosas. Seguir leyendo es peligroso. Se arriesga a perder definitivamente la imagen inofensiva que tiene de nubes, bosques, galaxias, hojas, plumas, flores, rocas, montañas, tapices, y de muchas otras cosas. Jamás volverá a recuperar las interpretaciones de todos estos objetos que hasta ahora le eran familiares."

Y en efecto, una vez conocidas las nociones básicas de esta teoría, ya nunca más se vuelve a mirar a la naturaleza y al mundo que nos rodea con los mismos ojos. Si observamos la naturaleza nos daremos cuenta que, a gran escala, existen formas "suaves" como la luna, el sol, o distintos tipos de frutos. Pero estos mismos objetos a una escala más pequeña empiezan a estar llenos de rugosidades. Además, las nubes, las montañas, o las fronteras entre países, no pueden representarse fielmente por medio de las figuras geométricas clásicas como la recta, la esfera, o el cono. Las matemáticas "clásicas" tan eficaces para describir los procesos regulares (geometría euclídea) o los modelos dinámicos lineales (mecánica de *Newton*), no son adecuadas para representar los procesos irregulares o los modelos dinámicos no lineales (modelos caóticos). *Mandelbrot* fue el primer matemático en darse cuenta de este hecho y a los setenta años de edad, elaboró una teoría que hoy en día está siendo utilizada en disciplinas tan diversas como la economía o la medicina.

La geometría fractal como tal nace en 1975, pero muchas de sus aplicaciones y conceptos eran conocidos mucho antes, aunque con objetivos totalmente diferentes. En 1875 tiene lugar una crisis importante de los fundamentos de las Matemáticas. Al mismo tiempo, un matemático, *Reymond*, trabajaba intensamente con la función de *Weierstrass*, una curva continua con un gran número de irregularidades, que eran conocidas en el siglo XVII, antes del descubrimiento del cálculo infinitesimal por *Newton* y *Leibnitz*, pero se tenía el convencimiento de eran muy escasas y poco interesantes desde el punto de vista de las aplicaciones. Los primeros en darse cuenta que las funciones con "**muchas irregularidades**" no eran la excepción sino la norma fueron *Cantor* y *Peano*, pero fue *Poincaré* el primero en hacer un estudio sistemático de todos estos hechos y elaborar una teoría que hoy en día se conoce con el nombre de Teoría del Caos. El final de la crisis de fundamentos se produce en 1925, y durante su desarrollo aparece un grupo importante de excelentes matemáticos: *Cantor, Peano, Lebesgue, Hausdorff, Besicovitch, Bolzano, Koch, Sierpinski.*

Las "**matemáticas clásicas**" son las herramientas adecuadas para estudiar las estructuras regulares de la geometría de *Euclides* y la evolución continua de la dinámica de *Newton*. Como hemos indicado, la necesidad de unas "nuevas matemáticas" se origina al descubrirse estructuras algebraicas que no encajaban con los patrones de *Newton* y *Euclides*, como son la curva de *Cantor* y la curva de *Peano*, las cuales son capaces de "llenar el plano". La cuestión clave está en lo siguiente: al ser una curva tienen dimensión 1, pero al rellenar un cuadrado su dimensión debería ser 2, por tanto, ¿cuál es la dimensión de estas estructuras? Estos nuevos elementos no estaban contemplados en la matemática tradicional y fueron consideradas como monstruos matemáticos.

Y llegamos a *Benoit Mandelbrot*, creador de estas nuevas estructuras matemáticas conocidas con el nombre de fractales. En 1973 le invitaron a dar una conferencia en el prestigioso *Collège de France* de París sobre sus trabajos realizados en los últimos veinte años y como consecuencia de ello publicó un libro al que debía dar título.

[…] así que me puse a buscar una palabra bonita de raíz latina para designarlo y cogí un diccionario de latín de mi hijo que había en casa y me puse a buscar «fractura», «fracción» etcétera, y me percaté de que todas esas palabras proceden del adjetivo latino «fractus, fracta, fractum» que hacían referencia a aquello en lo que se convierte una piedra al lanzarla: piezas irregulares. ¡Eureka! Ahí estaba el término que necesitaba.

Benoit Mandelbrot, nació en Warsaw, Polonia el 20 de Noviembre de 1924, su familia emigró a Francia en 1936, donde su tío *Szolem Mandelbrot*, que sucedió al gran matemático *Hadamar* en el cargo, se responsabilizó de su educación. Su dedicación a las matemáticas aplicadas parece ser que fue una reacción de rechazo al tipo de investigaciones en matemática teórica que hacía el grupo de investigación de su tío (grupo Bourbaki). Después de completar sus estudios en la Escuela Politécnica de París, viajó al Instituto Tecnológico de California en Estados Unidos y al Instituto de Estudios Avanzados de Princeton donde estudió con el gran matemático *John von Neuman*. Regresó a Francia en 1955 y trabajó en el Centro Nacional de Investigaciones Científicas. No permaneció en Francia mucho tiempo, descontento del tipo de Matemáticas que en aquel momento se hacían en este país. Fue la empresa IBM, en su centro de investigación *Watson Research Center*, donde encontró el ambiente adecuado para poder llevar a cabo sus numerosas ideas.

1.- *H. Poincaré*

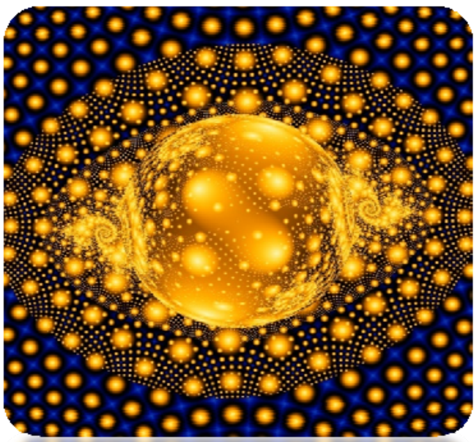
2.- *G. Julia*

3.- *B. Mandelbrot*

En 1945 su tío le comentó los trabajos de *Julía*, y se enfrentó a los mismos problemas desde un punto de vista diferente. Con la ayuda del ordenador demostró que en los trabajos de *Julia* se encuentran una de las fuentes de los más hermosos fractales que hoy en día conocemos. De esta manera, no solo descubrió nuevas ideas matemáticas, sino que supuso en su momento un avance muy importante en la construcción de los primeros programas para elaborar gráficos por ordenador.

Como muchos de los grandes descubrimientos matemáticos, los orígenes de la geometría fractal se encuentran en un problema de la vida real. En 1958 *Mandelbrot* trabajaba en IBM en una cuestión bastante común en las líneas telefónicas como era el ruido de fondo. El tema era bastante difícil de resolver puesto que no era posible construir un modelo matemático que representase fielmente al patrón con el que difundía el ruido. En 1945 había estudiado los trabajos de *Gastón M. Julía*, en especial "M*émoire sur l'iteration des fonctions rationelles*", y un poco después los trabajos de *Cantor*. Su intuición le llevó a aplicar estos nuevos descubrimientos y en especial hacer uso del conjunto de *Cantor* para simular el comportamiento de las fluctuaciones del ruido, y el modelo se ajustaba perfectamente a la situación que estaba estudiando. A partir de estos momentos su campo de investigación se centró en el análisis de aquellas estructuras que presentan un elevado número de irregularidades.

Fruto de sus primeras reflexiones es su famoso artículo: "*¿cuánto mide la costa de Gran Bretaña?* La idea de medir con segmentos (unidades de medida) más pequeños no es adecuada, como fácilmente puede entenderse, y en consecuencia la longitud de la costa dependerá de la escala que utilicemos para medirla. Para este tipo de curvas, totalmente irregulares, el concepto de medida no tiene sentido.



Pero, ¿qué es un fractal? Realmente es muy difícil dar una definición exacta puesto que requiere de un nivel muy elevado de abstracción. Además, debido al alto número de sus aplicaciones y campos tan diversos donde se aplican, la definición puede ser una u otra. Sin embargo, existe cierto consenso en destacar dos de sus propiedades más importantes. La primera de ellas es la **autosemejanza**, por la cual una pequeña sección del objeto puede ser vista como una reproducción a menor escala de todo el fractal. Esta propiedad puede observarse en la naturaleza, por ejemplo en una coliflor. Si desprendemos una de sus partes, entonces reconoceremos la forma de toda la figura inicial.

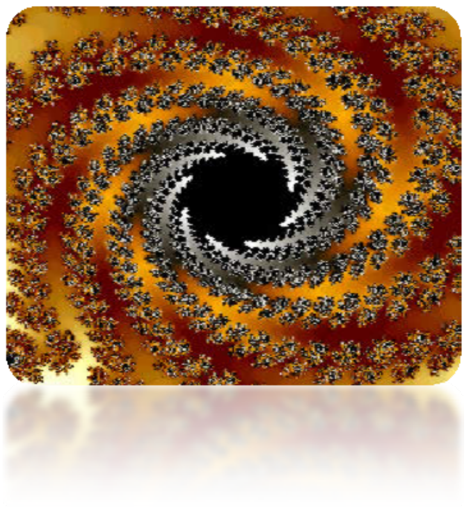
A continuación presentamos algunas de las definiciones más usuales:

- Los fractales son los objetos matemáticos que conforman la geometría de la Teoría del Caos.
- Los fractales son objetos cuya dimensión es un número racional.
- Un fractal es aquél objeto tal que su dimensión de *Hausdorff - Besicovich* es mayor que su dimensión topológica.
- Un objeto fractal es aquél que tiene la propiedad de autosemejanza y su dimensión es racional.

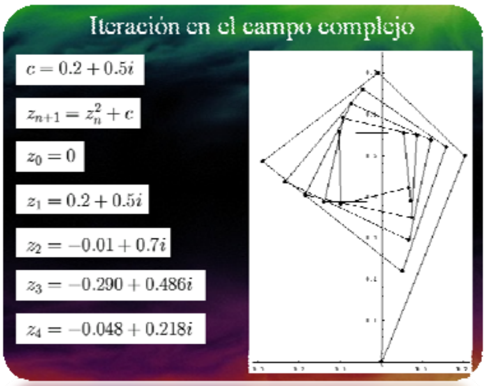
De entre todos los tipos de fractales, los lineales son los más simples. Un **fractal lineal** es aquel que se origina a través de la iteración infinita de un proceso geométrico bien especificado. Este proceso geométrico elemental, que es generalmente de naturaleza muy simple, determina perfectamente la estructura final, que muy frecuentemente, debido a la repetición infinita que se ha efectuado, tiene una complicación aparente extraordinaria. Normalmente los fractales son autosemejantes, es decir, tienen la propiedad de que una pequeña sección de un fractal puede ser vista como una réplica a menor escala de todo el fractal.

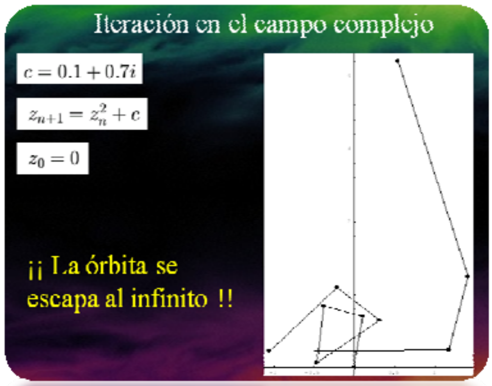
Un ejemplo de fractal lineal es el conocido con el nombre de “copo de nieve", curva que se obtiene tomando un triángulo equilátero y colocando sucesivos triángulos, cada vez de menor tamaño, en el tercio medio de los lados cada vez más pequeños. En teoría, el resultado es una figura de superficie finita pero con un perímetro de longitud infinita y con un número infinito de vértices.

Los fractales lineales son demasiado “perfectos" para representar los diferentes objetos de la naturaleza, como una hoja, un árbol o una nube. Por este motivo, se han introducido los **fractales no lineales**, aquel que se obtiene iterando una función no lineal definida en el conjunto de los números complejos. Entre los más conocidos se encuentran el fractal de *Mandelbrot* y el de *Julía.*



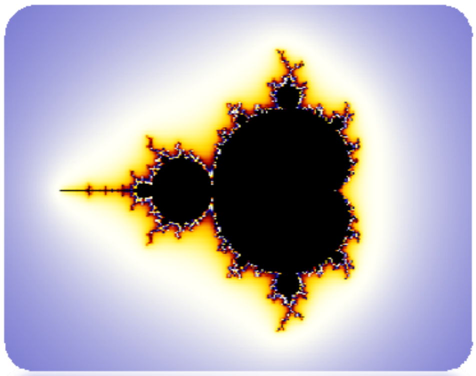
Antes de seguir adelante, es conveniente detenernos un momento y analizar con más detalle un concepto clave como es la iteración. Este proceso consiste en repetir y volver a repetir sobre sí mismo una cierta cantidad de veces. Por ejemplo, en el caso del conjunto de *Mandelbrot* la función no lineal con la que se trabaja es $f(z) = z^2 + c$, con z y c números complejos. Si seleccionamos un número complejo z_0, entonces calculamos $z_1 = f(z_0) = z_0^2 +c$, a continuación, $z_2 = f(z_1) = z_1^2 +c$, $z_3 = f(z_2) = z_2^2 +c$, y así sucesivamente. Si la sucesión $\{z_0, z_1, z_2, z_3, \ldots\}$, permanece a una distancia del origen menor de 2, entonces el punto z_0 está en el conjunto de *Mandelbrot.* Si la sucesión anterior diverge desde el origen, entonces el punto no pertenece al conjunto.





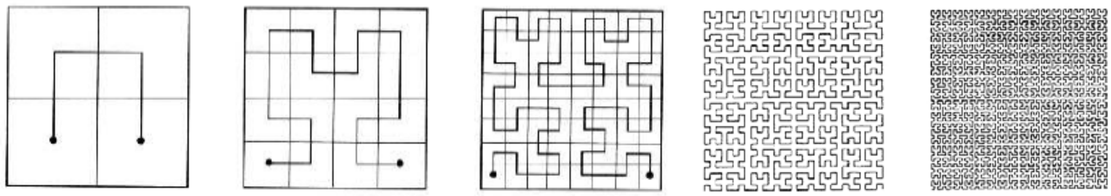
Los números incluidos en el conjunto de *Mandelbrot*, el punto correspondiente a la imagen aparece en color negro. En el caso de los números que no están dentro del conjunto, los colores se asignarán de acuerdo a la "rapidez" de incremento de la sucesión de números complejos. Por ejemplo, si la sucesión se incrementa lentamente, el punto inicial aparece de color celeste, si crece más rápidamente, tendrá color amarillo, rojo, o azul dependiendo de la velocidad de este incremento.

1.- *Imagen inicial de Mandelbrot*



2.- *Fractal de Mandelbrot coloreado*

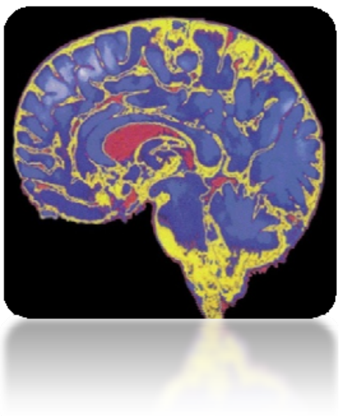
La otra característica de un objeto fractal, además de la autosemejanza, es que su **dimensión** puede ser **no entera**. Este aspecto es realmente llamativo ya que si nos fijamos en una curva, en principio todos estaríamos de acuerdo en que su dimensión tendría que ser uno. Sin embargo, existen curvas como la de *Hilbert* donde su dibujo es muy complicado. Para poner de manifiesto este hecho podemos dibujar el fractal lineal de *Hilbert* a través de la iteración infinita del siguiente proceso geométrico: dividimos el cuadrado unidad en cuatro cuadrados iguales y unimos los centros de dichos cuadrados por segmentos. Cada uno de esos cuadrados se divide de nuevo en cuatro cuadrados y conectamos sus centros comenzando siempre por el cuadrado superior izquierdo y terminando en el cuadrado superior derecho. Se continúa de esta manera indefinidamente uniendo los centros de los cuadrados que resultan en cada etapa.

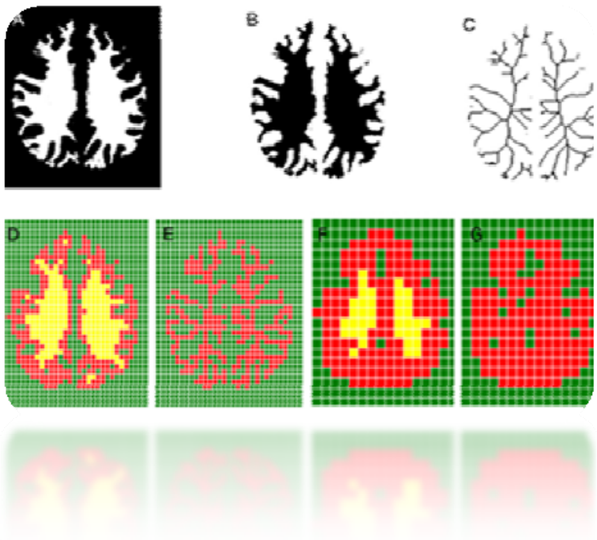


Las figuras anteriores representan el resultado final después de 3, 5 y 7 iteraciones. Por ser una curva, su dimensión topológica es uno, pero al "llenar" el cuadrado unidad es lógico pensar que su dimensión debería estar próxima a dos. De hecho puede probarse que su dimensión fractal es dos, aunque al ser una línea infinitamente quebrada su dimensión topológica sigue siendo uno. De manera similar puede construirse otros fractales geométricos, como por ejemplo la curva copo de nieve de *koch,* cuya dimensión fractal es 1.2618

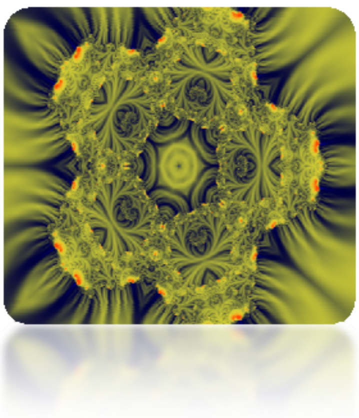
En general, la Geometría Fractal es la herramienta más adecuada para modelizar situaciones complejas originadas por múltiples repeticiones de procesos muy elementales, pues como acabamos de ver, los fractales ofrecen la posibilidad de construir estructuras complicadas a través de algoritmos muy simples. Este es el caso de muchos objetos de la naturaleza que se ramifican. De esta manera, y como bien saben los pintores, un árbol está compuesto por un gran número de otros árboles más pequeños. A partir de una estructura básica como la que aparece a la izquierda de la figura, y sucesivas repeticiones de la misma, obtenemos la forma de un árbol. Si introducimos cierta aleatoriedad entre las transiciones tendremos una réplica perfecta de un árbol cualquiera.

Como es natural, este proceso se manifiesta en otros contextos, por ejemplo en el cuerpo humano, debido al hecho de que el organismo organiza sus moléculas de la manera más eficiente para poder prolongarse a lo largo del tiempo. Ejemplos de ramificaciones los tenemos en el pulmón, el sistema nervioso o el sistema arterial. También y de manera menos evidente estructuras como la materia blanca del cerebro pueden ser estudiadas por medio de la dimensión fractal y de esta manera pueden ser diagnosticadas enfermedades degenerativas de tanta actualidad como la Esclerosis Múltiple o el Arzheimer.





Llama la atención del elevado número de personas, sin conocimientos matemáticos, que se han acercado a la geometría fractal por motivos únicamente estéticos.



Pero aparte de estas cuestiones artística, existen poderosas razones para estudiar estas estructuras fractales, ya que el número de aplicaciones aumenta constantemente en múltiples y diversas ramas del conocimiento.

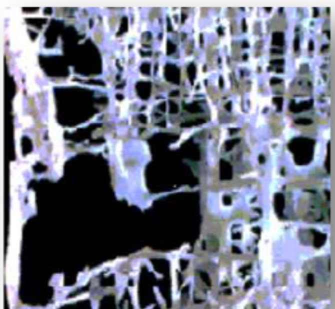
Es bastante probable que *Escher* no conociera el concepto de fractal, sin embargo desarrolló con frecuencia estructuras matemáticas muy parecidas a los fractales, ya que en un número considerable de sus obras incluye objetos relacionados con el infinito. Según comentó, su aproximación al infinito surgió del modelo de *Poincaré*, en el cual se puede representar la totalidad de una superficie infinita encerrada en un círculo finito.


Las fronteras de separación entre diferentes medios físicos biológicos o sociales proporcionan, con frecuencia, excelentes ejemplos de sistemas que se pueden analizar mediante fractales. Un ejemplo clásico que responde a ciertos modelos de curvas fractales es el de las costas, pero hay numerosos ejemplos de este tipo, como pueden ser los bordes de una nube, una superficie montañosa, la orilla de un río o incluso la frontera entre dos países diferentes.


El trazado de una costa o de la orilla de un río es un proceso con rasgos comunes al de una frontera. Los dos medios en contacto, agua y tierra, están mutuamente sometidos a largos períodos de interacción que modifican permanentemente los trazados de las costas y orillas en procesos acumulativos que operan sobre un amplio margen de escalas diferentes.

El proceso de ramificación y subramificación da su naturaleza fractal a los árboles. Pensemos, por ejemplo, en toda la red de afluentes de una determinada cuenca hidrográfica que comprende desde el río principal a las más pequeñas cortaduras por donde resbalan pequeños hilos de agua cuando llueve. Puesto que su función es drenar el agua de toda una cuenca hidrográfica, una red fluvial es un modelo natural de curva que cubre una superficie, una de las propiedades concebidas como aberrantes por los matemáticos de hace cien años y que es característica de conjuntos fractales como la curva de *Peano* o de *Hilbert*.

La Osteoporosis, es una enfermedad que para poder ser diagnosticada en un paciente tiene que estar en una fase muy avanzada. La enfermedad se detecta analizando la textura de los huesos, ya que son los que se ven afectados cuando la enfermedad ataca. Muchas veces la alteración tiene que ser muy grande para poder apreciarse y esto obliga a que los tratamientos tengan que ser muy prolongados. Un grupo de investigadores dirigidos realizó un programa de ordenador que ayudaba en la comparación de las texturas de los huesos. El proceso era el siguiente: se toma una muestra de la textura del hueso en su estado normal y se almacenaba en la memoria del ordenador. Luego se hacía lo mismo pero ya con los pacientes a los que se pensaban que eran propensos a sufrir la enfermedad. A continuación el programa comparaba las dos texturas y podía detectarse la presencia de la enfermedad.



En la actualidad, es posible regenerar tejido, como el de la piel, pero se está en la fase inicial de poder regenerar órganos completos para poderlos utilizar en los trasplantes. El problema fundamental se encuentra en diseñar una estructura, similar al sistema circulatorio, en la que poder apoyar las células en crecimiento del órgano. Investigadores del *Harvard Medical School* y el *Massachusetts Institute of technology* están utilizando patrones fractales generados por ordenador y los están grabando en discos de silicio con el objetivo de formar un molde. A partir de estos discos se fabrican microcanales de polímeros biodegradables y biocompatibles, y posteriormente las redes se apilan para poder construir una estructura tridimensional.

"La Filosofía está escrita en este inmenso libro que siempre está abierto ante nuestros ojos: me refiero al universo; pero no puede ser leído hasta que hayamos aprendido el lenguaje y nos hayamos familiarizado con las letras en que está escrito. Está escrito en lenguaje matemático, y las letras son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible entender una sola palabra."

(Galileo, Il Saggiatore, 1623)

Referencias.

- http://www.armoniafractal.com/
- http://www.arrakis.es/~sysifus/
- http://www.math.okstate.edu/mathdept/dynamics/
- http://www.armoniafractal.com/
- http://www.oni.escuelas.edu.ar/olimpi99/fractales/principal.htm
- http://www.milinkito.com/archivos/000984.php
- Curso internet: Introducción Geometría Fractal de Pablo Brañas