Análisis de Diseños. Reconocimiento de Isometrías

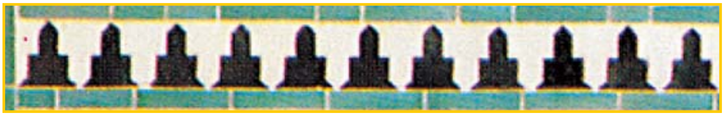
Este tema está pensado para que construyas el siguiente conocimiento matemático:

- Revisar los conocimientos anteriores sobre isometrías del plano y del espacio.
- Composición de isometrías.
- Reconocer isometrías que dejan invariante una figura plana o un cuerpo tridimensional.
- Analizar rosetones, frisos y mosaicos, detectando las isometrías que contienen.
- Buscar los motivos mínimos que permiten reconstruir un diseño plano.
- Estudiar las isometrías de los poliedros regulares.

Desde la Antigüedad, el deseo de encontrar orden y regularidad tanto en la Naturaleza como en nuestras propias creaciones, ha estimulado una gran actividad que concluyó en descubrimientos notables.

La simetría es un tema importante en esta búsqueda del orden y la regularidad. Aparece constantemente en la Naturaleza. Por ejemplo, en las hojas de las plantas, en la estructura molecular de numerosos cristales, en los diamantes,...

También las personas utilizan la simetría en sus creaciones. El curso pasado aprendiste a construir rosetones, frisos y mosaicos a partir de un diseño básico al que se le aplican determinadas isometrías: giros, traslaciones o reflexiones.

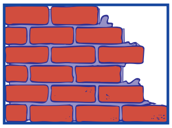


Comenzamos este tema repasando algunos conceptos estudiados en cursos anteriores.

Un **movimiento**, en el plano o en el espacio, es una transformación que cambia de posición todos los puntos del mismo, si bien, para algunos movimientos hay puntos que permanecen invariantes y figuras que, aunque todos sus puntos cambien de lugar, siguen siendo invariantes globamente.
A los movimientos que mantienen la forma y el tamaño de los objetos se les llama **isometrías**.

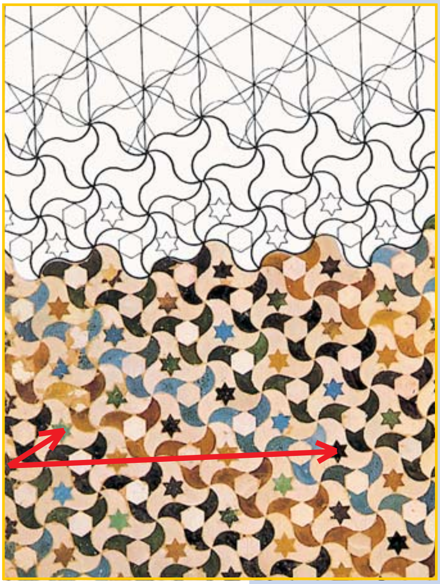
Son isometrías los siguientes movimientos:

- **Giro en el plano**: Es un movimiento que deja un solo punto fijo, llamado centro de giro. La región del plano determinada por una semirrecta de extremo el centro de giro, su transformada, y el centro de giro como vértice, se llama ángulo de giro.
  El centro de giro es el único punto invariante.
  Son invariantes globalmente por un giro las circunferencias concéntricas cuyo centro coincide con el centro de giro.
- **Giro en el espacio**: es un movimiento alrededor de una recta, llamada eje de rotación, de tal forma que puntos del plano perpendicular al eje determinan un giro en dicho plano cuyo centro es el punto del corte del eje con el plano. Los puntos del eje de rotación son los únicos puntos fijos.
- **Traslación**, en el plano o el espacio: es un movimiento, en una dirección determinada, que no deja ningún punto fijo.
  Las rectas cuya dirección coincida con la de la traslación son globalmente invariantes.
- **Reflexión**, en el plano o el espacio: Es un movimiento que mantiene toda una recta de puntos fijos en el plano -el eje de reflexión-, o todo un plano de puntos fijos en el espacio -el plano de reflexión-.
  Las circunferencias son globalmente invariantes por cualquier reflexión plana cuyo eje pase por el centro de la misma. Las esferas son globalmente invariantes por cualquier reflexión cuyo plano de reflexión pase por el centro de la misma.
- **Reflexión con deslizamiento**: es una reflexión seguida de una traslación en la misma dirección que el eje de reflexión. No mantiene ningún punto fijo.
- **Movimiento helicoidal**: es un movimiento de giro, en el espacio, alrededor de una recta, junto con un desplazamiento en la dirección de la recta. No mantiene ningún punto fijo.

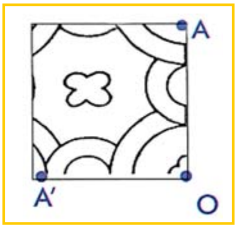


Como sabes, a un motivo se le puede aplicar una isometría y al resultado obtenido se le puede aplicar otra. A esto lo hemos llamado **composición de isometrías**.

Traslada el motivo de la figura siguiendo el vector *a*. A continuación aplícale al resultado obtenido la traslación determinada por el vector *b*. ¿Qué obtienes?



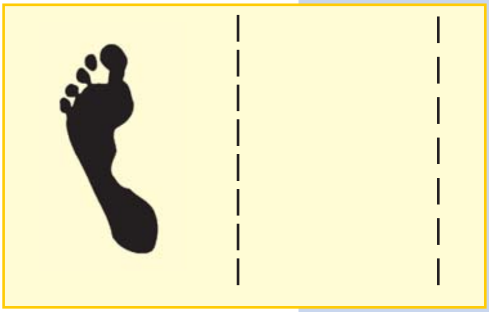
Calca la figura en papel vegetal, o similar. Haz coincidir la copia con el original y, haciendo centro en el punto O (pinchando con el lápiz), gira el papel vegetal hasta colocar el punto A sobre el A'. Se trata de un giro de centro O y 90º de amplitud.



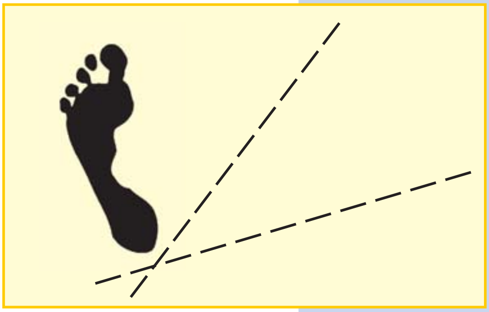
Dibuja en tu cuaderno el movimiento realizado. A la nueva figura obtenida aplícale un nuevo giro con el mismo centro y amplitud 90º. ¿Qué obtienes?, ¿qué amplitud tiene el nuevo giro?

Al componer dos traslaciones se obtiene otra traslación y al componer dos giros se obtiene otro giro. ¿Ocurrirá lo mismo al componer dos reflexiones?

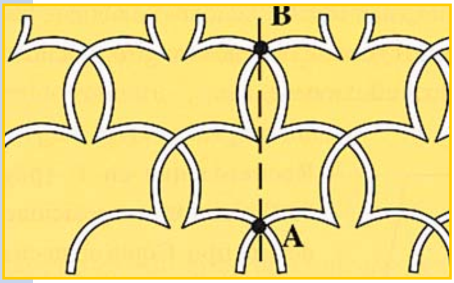
Copia en tu cuaderno la huella de la figura. Coloca un espejo sobre la primera línea de puntos y dibuja la imagen reflejada. Cambia el espejo a la segunda línea de puntos, paralela a la anterior, y dibuja la nueva imagen reflejada. ¿Qué has obtenido al componer estas dos reflexiones de ejes paralelos.
Mide la distancia que hay entre los dos ejes de reflexión y compara esta medida con la longitud de la traslación obtenida.



Haz lo mismo con la figura siguiente. Se trata de la composición de dos reflexiones de ejes secantes. ¿Qué se obtiene en este caso?



Como ya sabes, al componer una reflexión con una traslación en la misma dirección se obtiene otra isometría: una **reflexión con deslizamiento**.



Copia en papel vegetal, o similar, el dibujo de la figura y dale la vuelta colocándolo sobre el original de modo que las líneas discontinuas coincidan. Traslada la copia hacia arriba de modo que el punto A coincida con el B del original, ¿qué ocurre?

De la misma forma, al componer un giro en el plano con una traslación de dirección perpendicular al plano, se obtiene el **movimiento helicoidal**.

Recuerda

- La composición de dos traslaciones es una nueva traslación, cuyo vector se obtiene a partir de los dos iniciales.
- Al componer en el plano dos giros en el mismo centro de rotación se obtiene un nuevo giro con el mismo centro y amplitud la suma de los dos primeros.
- Al componer en el espacio dos giros del mismo eje de rotación se obtiene un nuevo giro con el mismo eje y amplitud la suma de los dos primeros.
- Al componer dos reflexiones en el plano de ejes de reflexión paralelos se obtiene una traslación cuyo vector de traslación tiene dirección perpendicular a los ejes de reflexión y longitud el doble de la distancia entre ellos.
- Al componer dos reflexiones de ejes secantes se obtiene un giro con centro de rotación en el punto de corte de los dos ejes de reflexión.
- Al componer dos reflexiones en el espacio de planos de reflexión paralelos se obtiene una traslación cuyo vector de traslación tiene dirección perpendicular a los planos de reflexión y longitud el doble de la distancia entre ellos.
- Al componer dos reflexiones de planos secantes se obtiene un giro con centro de rotación en la recta de corte de los dos planos de reflexión.
- Al componer una reflexión con una traslación de la misma dirección se obtiene una reflexión con deslizamiento.

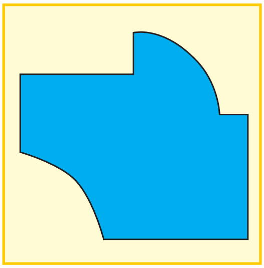
RECONOCIMIENTO DE ISOMETRÍAS EN EL PLANO

Algunos objetos, diseños, etc., deben parte de su belleza a la presencia de simetrías. Observa los rostros que aparecen en los cuadros. ¿En cuáles de ellos encuentras más armonía? ¿Qué papel juega la simetría?

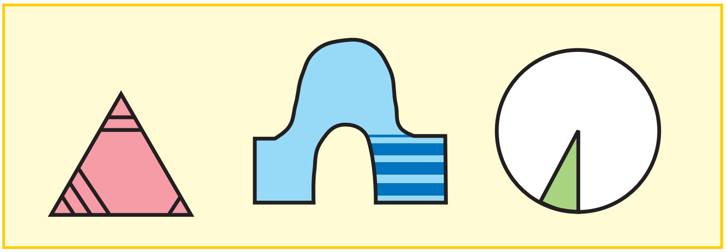
Detalle del cuadro «El Nacimiento de Venus». (Botticelli).

Detalle del cuadro «Las Señoritas de Avignon». (Pablo Picasso).

Toma un trozo de una cartulina, calca el dibujo de la figura de la derecha y recórtalo. ¿De cúantas formas puedes colocarlo para tapar el hueco dejado?



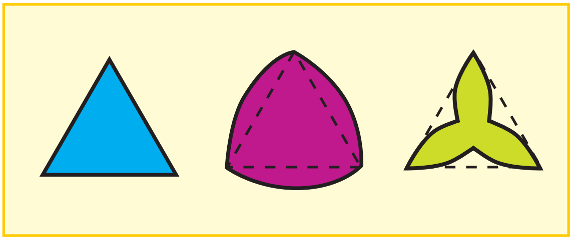
Haz lo mismo con las figuras siguientes. ¿De cuántas formas distintas puedes colocar cada una de ellas para tapar el hueco correspondiente?



Observa

Una figura irregular presenta sólo la identidad como isometría que la deja invariante.
La figura "perfecta" (según Poincaré) es la circunferencia, porque presenta infinitas isometrías que la dejan invariante.

Hay figuras diferentes y, sin embargo, presentan las mismas isometrías.

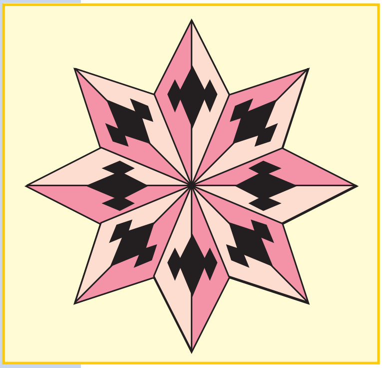


Estudia las letras del alfabeto y clasifícalas según las isometrías que presentan.

El curso pasado aprendiste a construir rosetones (revisar libro de 3º, pág. 358). Un **rosetón** es una figura, plana o tridimensional, que tiene un sólo punto invariante por la acción de las isometrías que la dejan invariante globalmente.

La figura muestra un rosetón. Busca su punto invariante. ¿Cuál es el menor ángulo que podemos girar alrededor de este punto para que coincida consigo mismo? Si quieres, puedes ayudarte calcando la figura en papel vegetal. Hazla coincidir con el original y, pinchando con el bolígrafo en el punto invariante, ve girando la copia hasta que coincidan de nuevo.
¿Cuál es el orden de rotación de este giro?

Decimos que una figura es **simétrica por rotación** si al girarla un ángulo determinado alrededor de un punto permanece invariante globalmente.



Llamamos **orden de rotación de la figura** al número de veces que es necesario girarla para que recupere su posición inicial. El orden de rotación coincide con el resultado de dividir 360º entre el ángulo de giro.

El rosetón de la izquierda presenta, además de los giros, una simetría por reflexión. Analízalo y señala el eje de reflexión. Puedes ayudarte con un espejo.

Decimos que una figura es **simétrica por reflexión** si queda globalmente invariante al aplicarle una determinada reflexión.

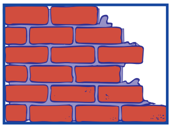
Recuerda

Llamamos rosetones cíclicos a los que presentan únicamente isometrías de giro y rosetones diedrales si ademas, presentan isometrías de reflexión.

La siguiente figura muestra **frisos**. ¿Existe alguna traslación que los deje invariantes?

Cálcalos en papel vegetal y hazlos coincidir con el original.
Desplaza la copia hasta que vuelvan a coincidir.
Se trata de una traslación. Indica la dirección y el menor vector que determina dicha traslación en cada caso.

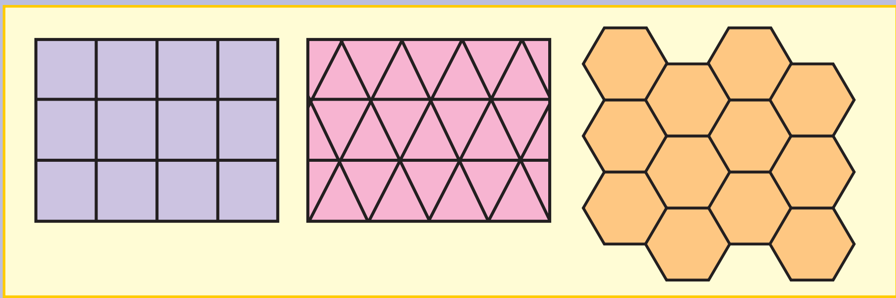
Una figura presenta **isometrías de traslación** cuando permanece invariante al trasladarla según una determinada dirección.

ANÁLISIS DE MOSAICOS

En los cursos anteriores has aprendido a construir mosaicos de distinto tipo.

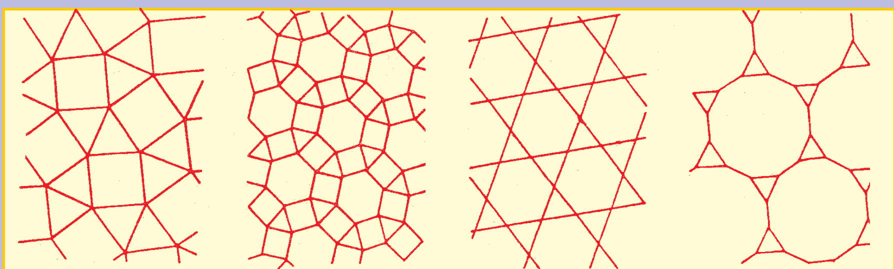
Llamamos **mosaico regular**, **plano o tridimensional**, al diseño formado utilizando copias iguales de un solo tipo de polígono o poliedro regular, respectivamente, que permite cubrir el plano o el espacio, sin dejar huecos ni solapamientos.



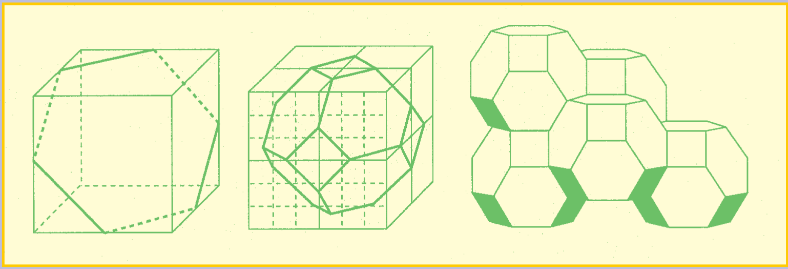
Llamamos **mosaico cuasirregular plano** al formado por polígonos iguales y de manera que los polígonos en los puntos medios o en los centros sean regulares.

Llamamos **mosaico cuasirregular tridimensional** al formado por prismas rectos cuyas bases coincidan con un mosaico cuasirregular plano.

Llamamos **mosaico semirregular plano** a la composición formada por dos o más tipos de polígonos regulares en la que la distribución de éstos alrededor de cualquier vértice es siempre la misma.



Llamamos **mosaico semirregular tridimensional** a la composición formada por dos o más tipos de poliedros regulares en las que la distribución de éstos alrededor de cualquier vértice es siempre la misma, o bien, a la composición formada por un solo tipo de poliedros semirregulares.

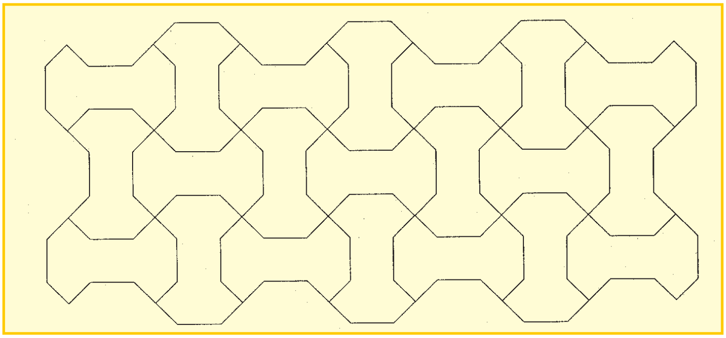


Llamamos **mosaico periódico plano** al que se obtiene aplicando a un paralelogramo decorado dos traslaciones de vectores con distinta dirección, convenientemente elegidos.

Llamamos **mosaico periódico en 3D** al que se obtiene aplicando a un paralelepípedo tres traslaciones de vectores con distinta dirección, convenientemente elegidos.

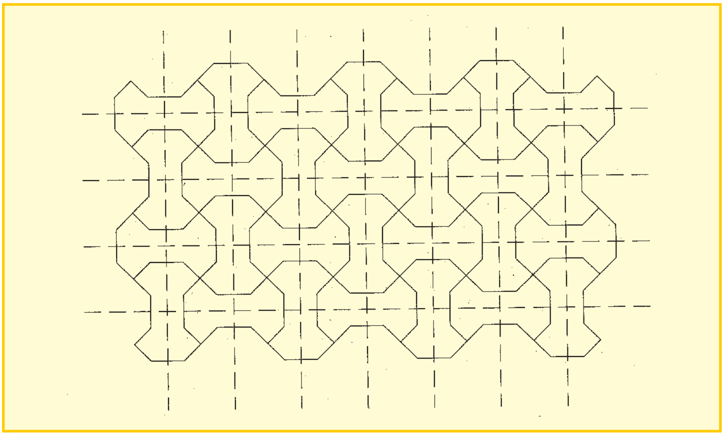
En este curso vamos a resolver un problema diferente: ***Dado un mosaico, ¿cuál será la información mínima a partir de la cual se puede componer el mosaico completo?***

En una visita a la Alhambra vimos el siguiente diseño, que nos encantó por su sencillez y belleza.

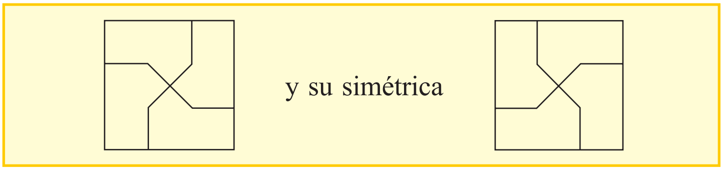


Al volver, nos pareció una buena idea reproducirlo para alicatar la terraza de nuestra casa. El problema es que el ceramista al que pensamos encargárselo sólo estaba dispuesto a fabricar baldosas cuadradas, pues ya tenía el molde y hacer otro únicamente para este encargo era demasiado costoso. ¿No podríamos diseñar baldosas cuadradas que contengan un dibujo y que, colocándolas convenientemente, den lugar al mosaico? Después ya disimularemos las uniones de los cuadrados.

Para resolver este problema buscamos los ejes de reflexión del mosaico:

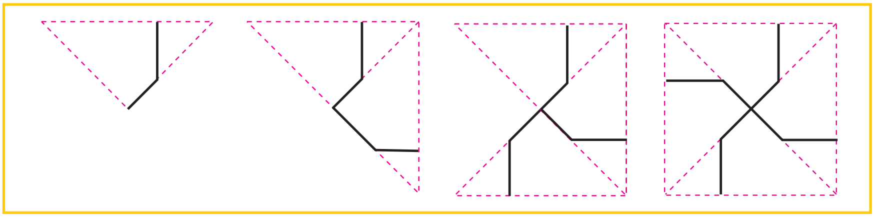


¡Han aparecido las baldosas cuadradas! Sólo que hay dos distintas:



Pero el ceramista vuelve a poner problemas. El cuadrado es demasiado grande, no lo puede construir. No le importaría cambiar algo la forma, siempre que fuera más pequeña, con menos trazos. Además, hacer baldosas con dos diseños distintos sería muy caro, ¿no podríamos estudiar baldosas con un único diseño?

Las Matemáticas pueden ayudarnos. Si observas de nuevo la baldosa, verás que tiene una isometría de giro de orden 4 (es decir, un giro de 90º). Podemos tomar una cuarta parte del cuadrado (triángulo rectángulo), y obtener las otras 3 girando la primera:



De esta forma hemos encontrado la baldosa más pequeña que permite reproducir el mosaico completo.

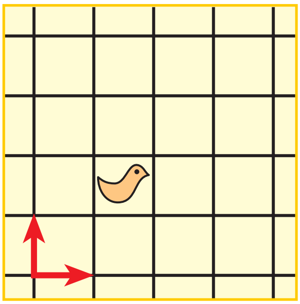
En nuestra visita a la Alhambra, además del anterior, hemos visto otros mosaicos que nos gustaría reproducir en casa.



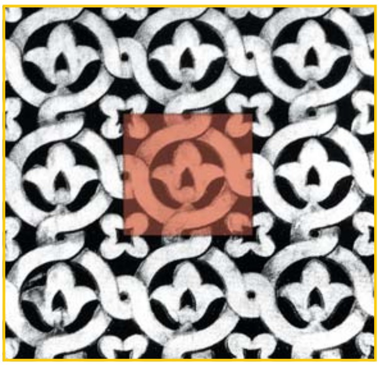
¿Podrán las Matemáticas seguir ayudándonos?

PASO A PASO

Completa la trama del dibujo a partir de las dos traslaciones cuyo vector se indica:

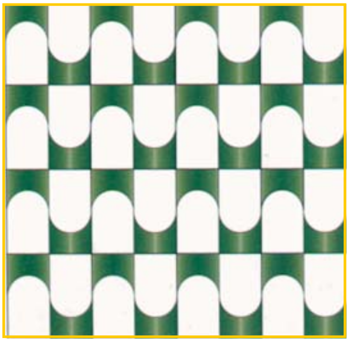


En el siguiente mosaico se ha coloreado una baldosa. Busca isometrías que permitan cubrir el plano a partir de ella.
Elige el menor número de isometrías de las encontradas y completa el mosaico.

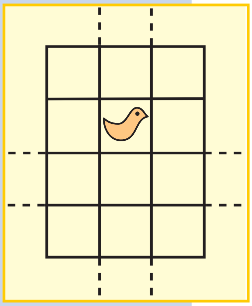
A estas isometrías las llamaremos **generadores del mosaico** y a la baldosa más pequeña a partir de la cual se puede cubrir todo el plano, la llamaremos **motivo mínimo del mosaico**.

Busca, en el siguiente mosaico, el motivo mínimo y las isometrías que forman su sistema generador.



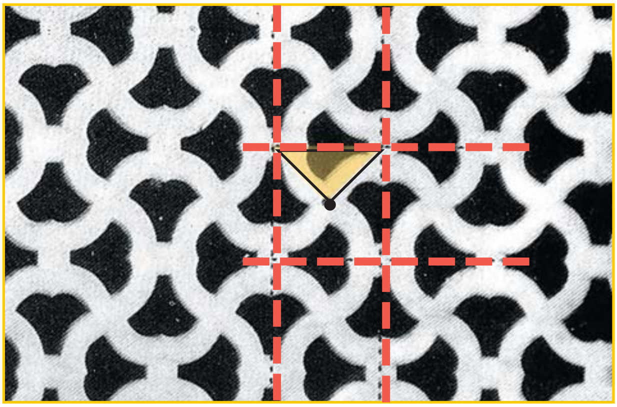
Recuerda

- Llamaremos **motivo mínimo** de un mosaico a la menor porción del mismo que permite reconstruirlo completamente.
- Llamaremos **sistema generador** al conjunto mínimo de isometrías que, aplicadas al motivo mínimo, permiten reconstruirlo completamente.



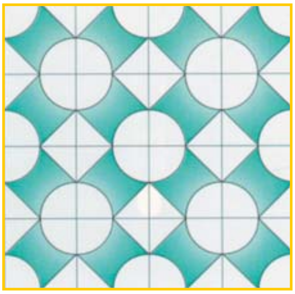
Completa la trama del dibujo de la izquierda, aplicando las 4 reflexiones cuyos ejes se indican con líneas discontinuas.

En el siguiente mosaico se ha coloreado la baldosa mínima. Busca isometrías que permitan llevar el motivo mínimo al resto del mosaico.

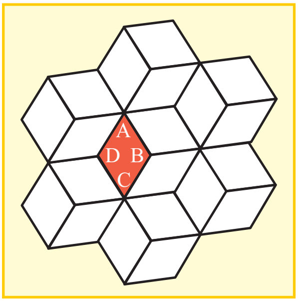


Elige el menor número de isometrías de las encontradas y completa el mosaico.

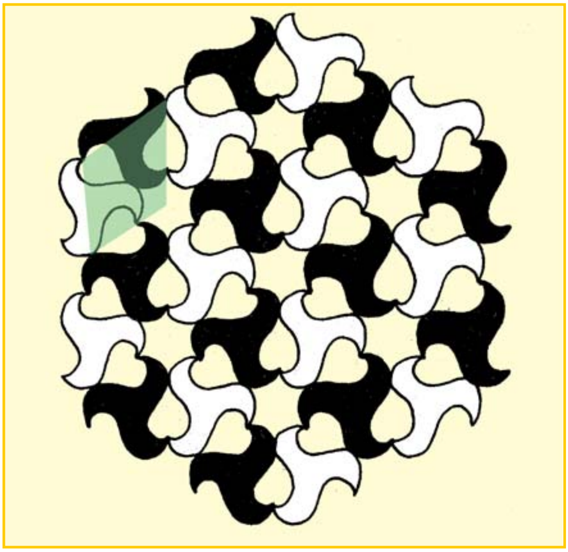
Busca, en el siguiente mosaico, el motivo mínimo y las isometrías que forman su sistema generador.

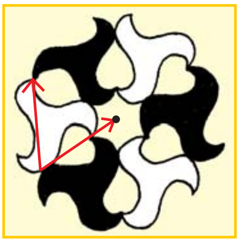


Completa el dibujo utilizando 2 giros de 120º y de centros los puntos A y B.



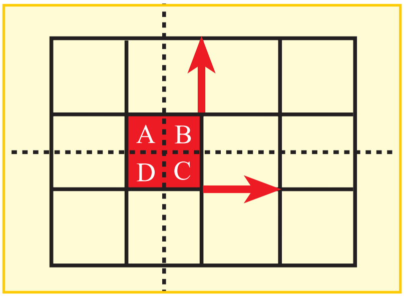
En el mosaico siguiente se ha coloreado la baldosa mínima. Busca isometrías que permitan llevar el motivo mínimo al resto del mosaico.



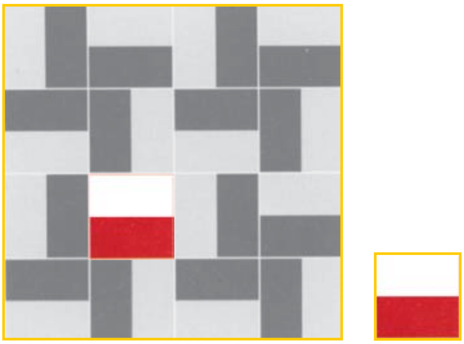


Elige el menor número de isometrías de entre las encontradas que te permitan completar el mosaico.

Completa el siguiente dibujo, utilizando las 2 reflexiones con deslizamiento cuyos ejes indican las líneas de puntos y de vectores de traslación los indicados.

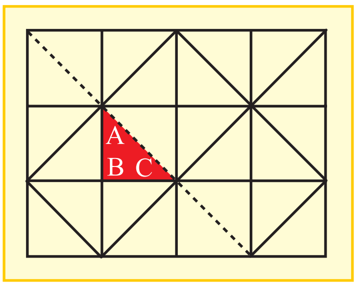


En el siguiente mosaico se ha coloreado la baldosa mínima. Busca isometrías que permitan llevar el motivo mínimo al resto del mosaico.

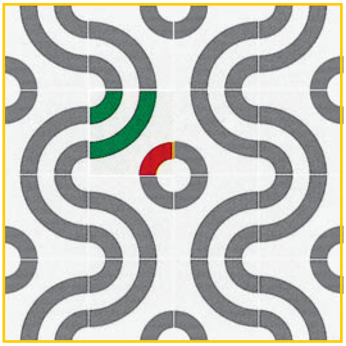


Elige el menor número de isometrías de las encontradas y completa el mosaico.

Completa el siguiente dibujo, utilizando un giro de 90º con centro C y una reflexión cuyo eje indica la línea de puntos.

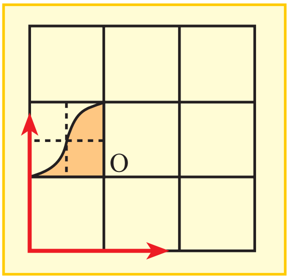


En el siguiente mosaico se ha coloreado la baldosa mínima. Busca isometrías que permitan llevar el motivo mínimo al resto del mosaico.

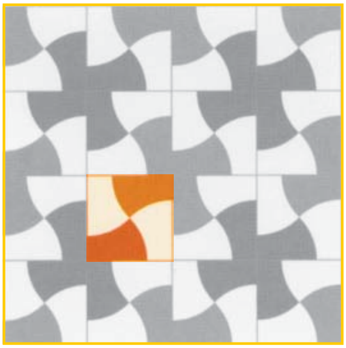


Elige el menor número de isometrías de las encontradas y completa el mosaico.

Completa el dibujo de la derecha utilizando 4 giros de centro O, y las traslaciones que indican los vectores:



En el mosaico siguiente, se ha coloreado la baldosa mínima. Busca isometrías que permitan llevar el motivo mínimo al resto del mosaico.



Elige el menor número de isometrías de las encontradas y completa el mosaico.

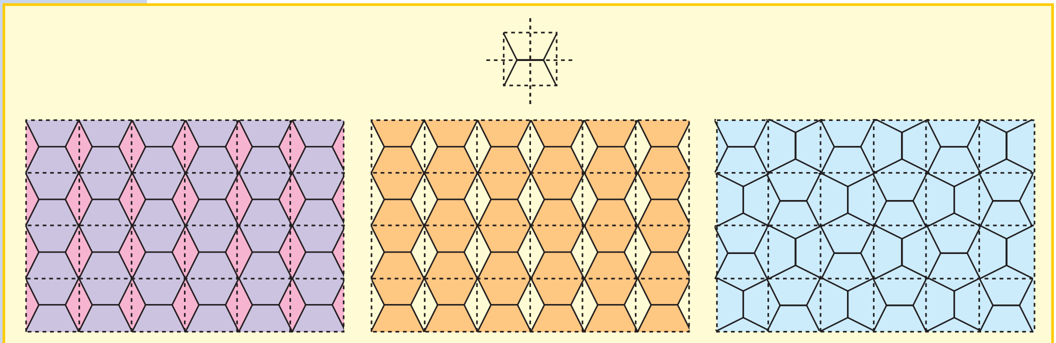
Toma como base la baldosa de la figura siguiente. Colócala sobre mallas cuadradas y aplícale las siguientes isometrías:

1ª. Traslaciones de vectores BC y BA.

2ª. Reflexiones de ejes CD y AD.

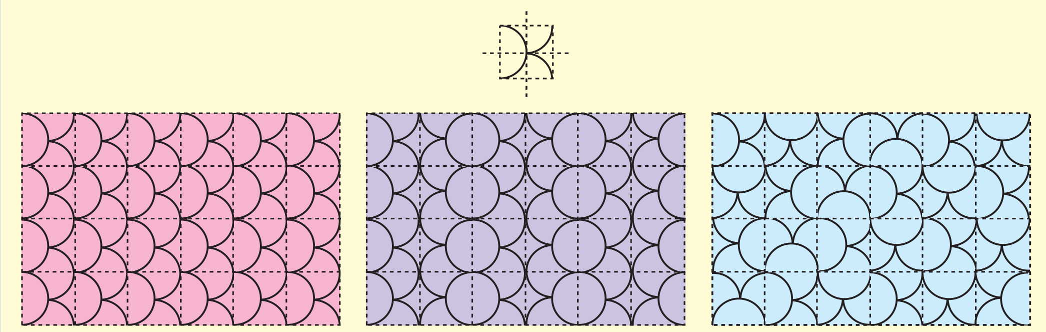
3ª. 3 Giros de 90º y centro D.

¿Son iguales los mosaicos que obtienes?



Traslación Simetría Giro

Parte ahora de esta nueva baldosa, aplícale distintas isometrías para construir mosaicos y compáralos con los obtenidos por otras personas de tu clase.

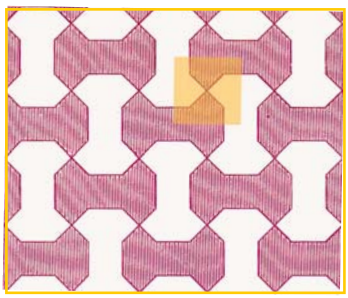


Traslación Simetría Giro

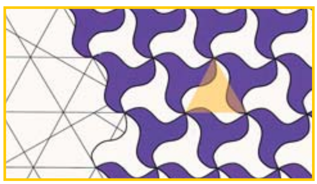
Observa el mosaico de la figura de la izquierda.

Utilizando lo que ya sabes de simetrías, busca el motivo mínimo que lo genera.

En el siguiente mosaico aparece señalado el motivo mínimo. Busca sistemas de generadores del mismo.

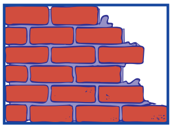


¿Te atreves ahora con otros mosaicos de la Alhambra?



ISOMETRÍAS EN EL ESPACIO

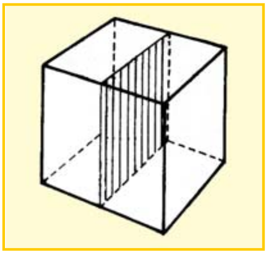
Saliendo del plano, podemos analizar los poliedros poniendo énfasis en su simetría, armonía, regularidad y belleza, frente a las descripciones de los elementos que los componen y otras propiedades. Busquemos las simetrías que los organizan.



PLANOS DE SIMETRÍA DE LOS POLIEDROS REGULARES

Como el cubo es el más familiar, empecemos buscando sus planos de simetría. Recuerda que un plano de simetría es un espejo que refleja una parte del objeto, de forma que lo podemos ver entero.

Utilizando pajitas de refresco unidas mediante hilos, construye un cubo. Marca los puntos medios de 4 aristas paralelas y coloca un espejo que pase por los puntos marcados, ¿qué ocurre? ¿Se puede decir que el espejo es un plano de simetría del cubo? ¿Cuántos planos de simetría de este tipo tiene el cubo?



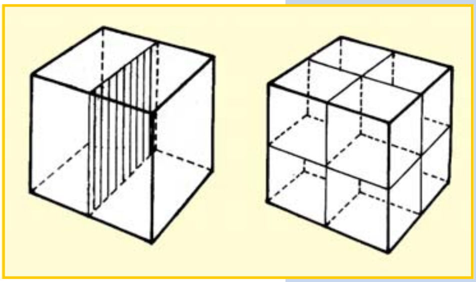
Ahora intenta colocar el espejo de forma que pase por las diagonales de dos caras opuestas, ¿es otro plano de simetría? ¿Cuántos de estos habrá?

Busca otros planos de simetría; por ejemplo, los que pasen por las aristas del cubo, ¿cuántos hay? ¿Tiene el cubo algunos otros planos de simetría?

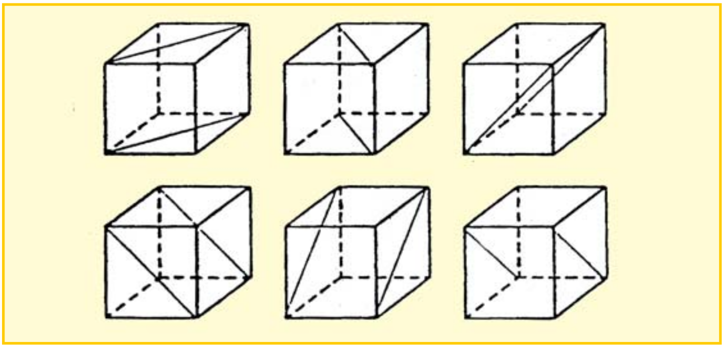
Observa

Si se pasa del plano al espacio podemos encontrar los planos de simetría del cubo a partir de los ejes de simetría del cuadrado.

Las rectas que pasan por los puntos medios de dos lados paralelos de un cuadrado son ejes de simetría de éste. Los planos que pasa por los ejes de simetría de dos caras paralelas de un cubo son planos de simetría del mismo. Un cubo tiene tres pares de caras paralelas, luego tendrá tres de estos planos de simetría. Son planos paralelos a pares de caras.



Las diagonales de un cuadrado son los otros ejes de simetría del cuadrado. Los planos que pasan por las diagonales de caras opuestas de un cubo son sus otros planos de simetría. Como el cubo tiene 3 pares de caras opuestas, y por cada par de caras hay 2 pares de diagonales, en total habrá 6 planos de simetría de este tipo. Estos planos pasan por pares de aristas opuestas.



Definición

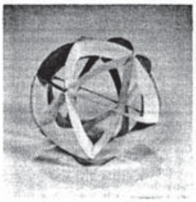
Llamaremos **plano de simetría de un poliedro** a un plano que pase por algún eje de simetría de dos caras paralelas.

Una vez resuelto el problema de la búsqueda de todos los planos de simetría del cubo, aplica un procedimiento análogo para encontrar planos de simetría de los 4 poliedros regulares restantes y completa la tabla siguiente:

PLANOS DE SIMETRÍA DE LOS POLIEDROS REGULARES

Poliedro	que pasan por una arista y el punto medio de otra	que son paralelos a pares de caras	que son perpendiculares al segmento que une pares de vértices	que pasan por pares de aristas opuestas	que pasan por puntos medios de pares de aristas opuestas	que pasan por pares de aristas opuestas y cortan por el punto medio a otro par de aristas
Tetraedro						
Cubo		3		6		
Octaedro						
Dodecaedro						
Icosaedro						

Analiza los resultados de la tabla y compara lo que ocurre para las parejas de poliedros duales.

PLANOS DE SIMETRÍA DE LOS POLIEDROS PLATÓNICOS						
Posición relativa en el espacio						
Tetraedro		Cubo y octaedro			Dodecaedro e icosaedro	
						
Descripción de los planos de simetría en función del poliedro y número de planos						
Poliedro	**que pasan por una arista y el punto medio de otra**	**que son paralelos a pares de caras**	**que son perpendiculares al segmento que une pares de vértices**	**que pasan por pares de aristas opuestas**	**que pasan por puntos medios de pares de aristas opuestas**	**que pasan por pares de aristas opuestas y cortan por el punto medio a otro par de aristas**
Tetraedro	6					
Cubo		3		6		
Octaedro			3		6	
Dodecaedro						15
Icosaedro						15

Observa

El cubo y el octaedro (poliedros duales) tienen los mismos planos de simetría, y la disposición de éstos en el espacio es exactamente la misma.

El dodecaedro y el icosaedro (poliedros duales) tienen los mismos planos de simetría y con la misma disposición en el espacio.

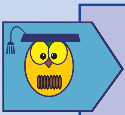
EJES DE ROTACIÓN DE LOS POLIEDROS REGULARES

Construye con cartulina o cartón fino, un cubo y un octaedro utilizando alguno de sus desarrollos planos.

Sobre el cubo, marca el centro de dos caras opuestas. Toma una varilla y hazla pasar a través de los puntos marcados de forma que, apoyando la varilla sobre la mesa, puedas girar el cubo. Colócalo en una posición cualquiera y fíjate bien en él. Gíralo poco a poco, y cuenta el número de veces que aparece con el mismo aspecto, antes de volver a la posición de partida.

Diremos que la varilla es un **eje de rotación** del cubo, de orden el número de veces que se presenta con el mismo aspecto cuando se gira una vuelta completa alrededor del eje. En este caso se trata de un eje de rotación de orden 4.

Busca otros ejes de rotación del cubo, de orden 4. ¿Dónde están situados? ¿Cuántos hay?



Definición

Llamaremos **eje de rotación de un poliedro** a una recta tal que si se gira el poliedro alrededor de ella, antes de dar una vuelta completa, éste aparece con el mismo aspecto que en la posición inicial.

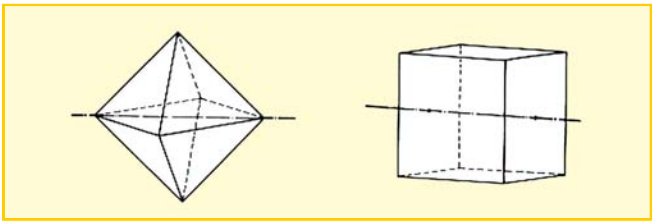
Llamaremos **orden de rotación** del eje al número de veces que aparece el poliedro con el aspecto inicial antes de completar una vuelta.

Recuerda que, en el plano, llamábamos orden de rotación de una figura al menor número de veces que tenemos que girar la figura para que, permaneciendo invariante globalmente, vuelva a la posición original antes de completar una vuelta completa.

El centro de un cuadrado es un centro de giro, ¿de qué orden? ¿Encuentras alguna relación entre el orden de rotación del cubo y el orden de rotación del centro de sus caras?

Por ser poliedros duales, las caras del cubo se corresponden con los vértices del octaedro. Toma el octaedro construido antes y haz pasar una varilla por dos vértices opuestos del octaedro (que se corresponden a las dos caras opuestas del cubo). ¿Se trata de un eje de rotación del octaedro? ¿Cuál es su orden? ¿Cuántos de estos ejes encuentras?

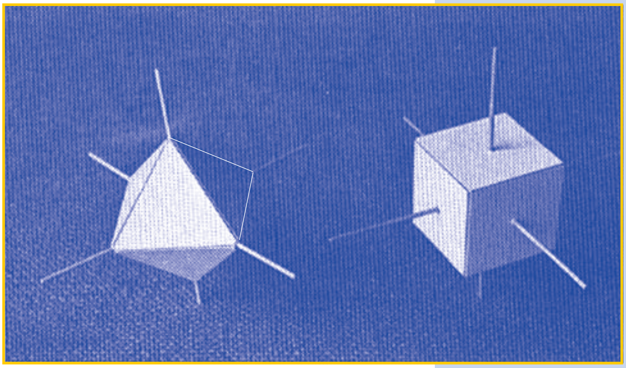
¿Qué orden tienen los vértices de un octaedro? ¿Encuentras alguna relación entre este número y el eje de rotación?



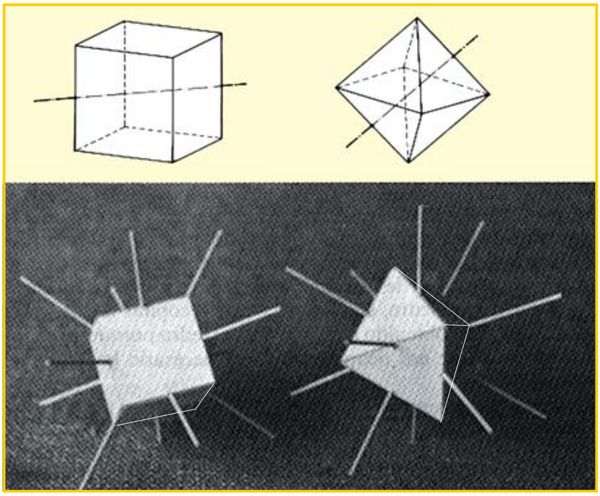
Hagámoslo ahora al revés. Haz pasar una varilla por dos vértices opuestos del cubo y otra por el centro de dos caras opuestas del octaedro. ¿Son ejes de rotación de estos poliedros? ¿De qué orden? ¿Cuántos hay?

El centro de una cara del octaedro es un centro de rotación del triángulo equilátero, ¿cuál es su orden? ¿Encuentras alguna relación entre este orden y el de los nuevos ejes de rotación del octaedro?

¿Qué orden tienen los vértices del cubo? ¿Tiene alguna relación con el orden de los nuevos ejes de rotación encontrados en el cubo?



¿Tendrán más ejes de rotación estos poliedros? Prueba pasando una varilla por los puntos medios de dos aristas opuestas, en ambos casos. ¿Qué ocurre?



Siguiendo un procedimiento análogo, analiza lo que ocurre con el resto de poliedros regulares y completa la tabla:

EJES DE ROTACIÓN Y ORDEN DE LOS EJES				
Poliedro	Ejes de orden 2	Ejes de orden 3	Ejes de orden 4	Ejes de orden 5
Tetraedro				
Cubo	6	4	3	
Octaedro	6	4	3	
Dodecaedro				
Icosaedro				